Corrigé Série 09 : loi de Kepler et mouvement relatif

Exercices d'introduction

A Trajectoire circulaire, lois de Kepler

Plusieurs méthodes sont envisageables pour déterminer l'altitude du satellite. On peut par exemple exploiter la deuxième loi de Newton appliquée au satellite en tenant compte du fait que le mouvement est circulaire uniforme avec une accélération purement normale à la trajectoire. On peut également prendre comme point de départ la troisième loi de Kepler, le demi-grand axe de la trajectoire elliptique s'identifiant ici au rayon R_s de la trajectoire circulaire suivie par le satellite :

$$\frac{T^2}{R_\mathrm{s}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\mathrm{T}}\,.$$

La période T est le temps nécessaire au satellite pour parcourir un tour complet. Dans le cas d'un satellite géostationnaire, cette période est égale à la durée d'un jour sidéral. Connaissant le rayon de la Terre, R_T, l'altitude h_s cherchée a donc pour expression

$$\begin{aligned} h_\mathrm{s} &= R_\mathrm{s} - R_\mathrm{T} = \left(\frac{GM_\mathrm{T}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_\mathrm{T} \\ &\cong \left(\frac{6.6732\cdot 10^{-11}\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\cdot (23\cdot 3600 + 56\cdot 60 + 4)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6.3710\cdot 10^6 \\ &\cong 3.57956\cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35795.6\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

B Carrousel

1. Pour l'enfant au moment du lancer de la balle :
   (a) Dans le référentiel fixe les forces ressenties sont : le poids $\vec{P} = m_\mathrm{enf.}\vec{g}$, la réaction du carrousel $\vec{R}$, les forces de frottement statique entre l'enfant et le carrousel, $\vec{F_f}$. C'est la force centripète qui assure le mouvement circulaire de l'enfant dans le référentiel fixe, et comme l'accélération centripète vaut ici $-\omega_0^2\, r_\mathrm{enf.}\, \vec{e_{x'}}$, on a $\vec{F_f} = -m_\mathrm{enf.}\,\omega_0^2\, r_\mathrm{enf.}\, \vec{e_{x'}}$.
   (b) L'enfant est immobile dans le référentiel tournant du carrousel. Les forces ressenties sont : le poids $\vec{P} = m_\mathrm{enf.}\vec{g}$, la réaction du carrousel $\vec{R}$, les forces de frottement statique entre l'enfant et le carrousel $\vec{F_f}$, et la force centrifuge due à la rotation du carrousel $\vec{F}^{(e)} = m_\mathrm{enf.}\,\omega_0^2\, r_\mathrm{enf.}\, \vec{e_{x'}}$. Comme l'enfant est immobile dans le référentiel lié au carrousel, la somme de toutes ces forces est nulles. En particulier, la force centrifuge annule la force de frottement statique, i.e., $\vec{F_f} = -m_\mathrm{enf.}\,\omega_0^2\, r_\mathrm{enf.}\, \vec{e_{x'}}$, comme trouvé dans le référentiel fixe.

2. Pour la balle au moment où elle est lancée :
   (a) Dans le référentiel fixe de la terre, la balle n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m_{\text{bal.}}\vec{g}$
   (b) Dans le référentiel tournant, la balle va ressentir : le poids $\vec{P} = m_{\text{bal.}}\vec{g}$, la force centrifuge due à la rotation du carrousel $\vec{F}^{(e)} = m_{\text{bal.}}\omega_0^2 r_{\text{bal.}}\vec{e_{x'}}$, et la force de **Coriolis** $\vec{F}^{(c)} = -2m_{\text{bal.}}\vec{\omega_0} \times \vec{v_{\text{bal.}}}$.

3. Nous pouvons dessiner la trajectoire de la balle dans le référentiel fixe de la Terre, en mettant en évidence la vitesse initiale $\vec{v_0}'$ et la vitesse d'entraînement $\vec{v}^{(e)}$:

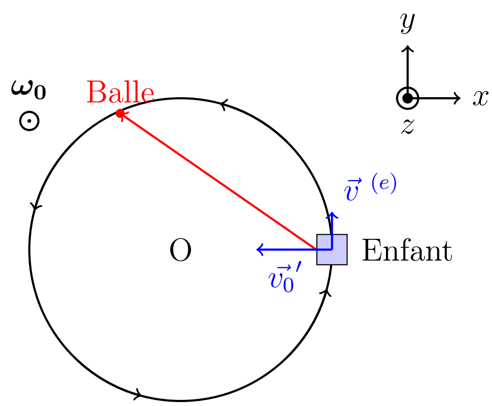


Figure 1 – Trajectoire de la balle dans le référentiel fixe de la Terre

4. Nous pouvons dessiner la trajectoire de la balle dans le référentiel tournant du carrousel, en mettant en évidence les forces. Le poids rentre dans le plan, la force centrifuge est toujours orientée vers le centre de rotation, et la force de Coriolis est perpendiculaire à la trajectoire à chaque instant.

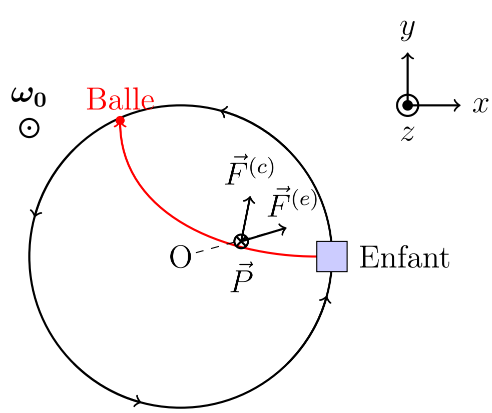


Figure 2 – Trajectoire de la balle dans le référentiel tournant du carrousel.

5. Nous pouvons dessiner la trajectoire de la balle dans le référentiel tournant du carrousel lorsque la vitesse de rotation est plus élevée. À nouveau, le poids rentre dans le plan, la force centrifuge est toujours orientée vers le centre de rotation, et la force de Coriolis est perpendiculaire à la trajectoire à chaque instant. Étant donné que dans ce cas de figure la vitesse de rotation du carrousel est plus

élevée, alors les vecteurs des forces $\vec{F}^{(c)}$ et $\vec{F}^{(e)}$ sont plus grands, ce qui entraîne une trajectoire plus courbée que dans le cas précédent.

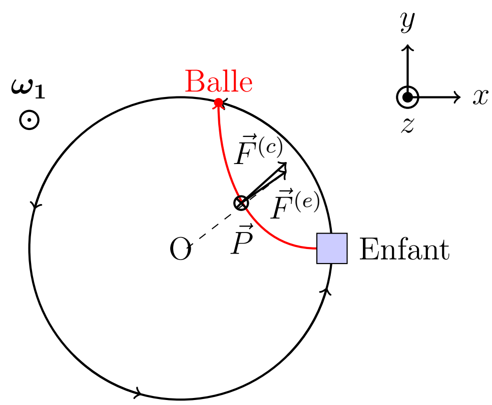


FIGURE 3 – Trajectoire de la balle dans le référentiel tournant du carrousel à $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_z}$

C Pendule dans un train

Les forces qui s'appliquent sur le pendule sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, et la tension du fil $\vec{T}$, et le train est accéléré avec une accélération $\vec{a_t}$.

1. Dans le référentiel fixe de la terre $\{O, \vec{x_1}, \vec{y_1}\}$, en projectant ces forces et l'accélération sur le repère, et le pendule étant à l'arrêt, nous pouvons donc écrire la 2ème loi de Newton comme :

$$\begin{cases} ma_t = T\sin(\theta) \\ mg = T\cos(\theta) \end{cases} \tag{1}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\tan\theta = \frac{a_t}{g} \tag{2}$$

2. Dans le référentiel accéléré du train $\{A, \vec{x_2}, \vec{y_2}\}$ nous devons en plus prendre en compte la force d'inertie due au mouvement accéléré du train qui est $\vec{F_t} = -m\vec{a_t}$. Le pendule étant à l'équilibre dans ce référentiel, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \Sigma(\vec{F}) - m\vec{a_t}(\text{Train}) && (3) \\ &= \Sigma(\vec{F}) - m\vec{a_t}(\text{Train}) && (4) \\ &= m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_t} && (5) \end{aligned}$$

En projetant sur les axes $\{A, \vec{x_2}, \vec{y_2}\}$:

$$\begin{cases} T\sin\theta - ma_t & = 0 \\ T\cos\theta - mg & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Et on obtient à nouveau :

$$\tan\theta = \frac{a_t}{g} \tag{7}$$

D Mouvements relatifs

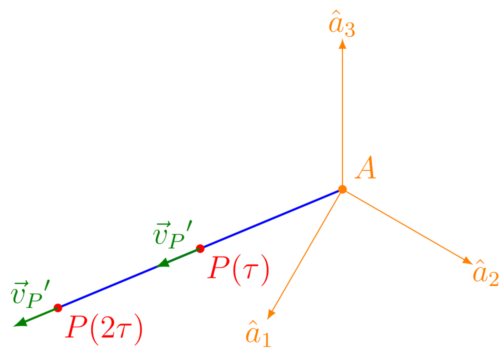
Rappel : les accélérations $\vec{a}_P$ (relativement à $\mathcal{O}$) et $\vec{a}_P{}'$ (relativement à $\mathcal{A}$) sont liées, en absence de rotation, par

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_P{}' \,.$$

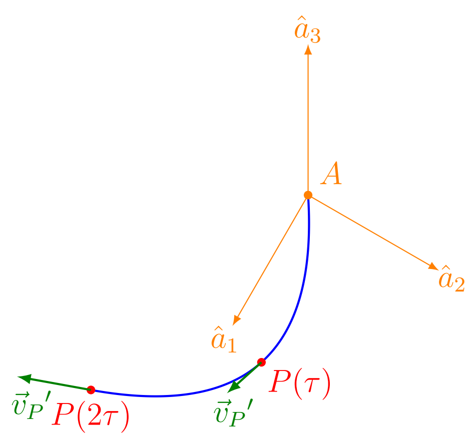
P se déplaçant à vitesse constante relativement à $\mathcal{O}$, nous avons $\vec{a}_P = \vec{0}$ et donc

$$\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A \,.$$

1. P est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{A}$. En effet, A se déplaçant à vitesse constante relativement à $\mathcal{O}$, $\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A = \vec{0}$.



2. P est en mouvement uniformément accéléré par rapport à $\mathcal{A}$ et sa trajectoire est donc une parabole. En effet, A se déplaçant avec une accélération $\vec{a}_A$ relativement à $\mathcal{O}$, nous avons $\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A$.
$\vec{a}_P{}'$ est un vecteur directeur de l'axe de la parabole.



1 Voyage vers Mars

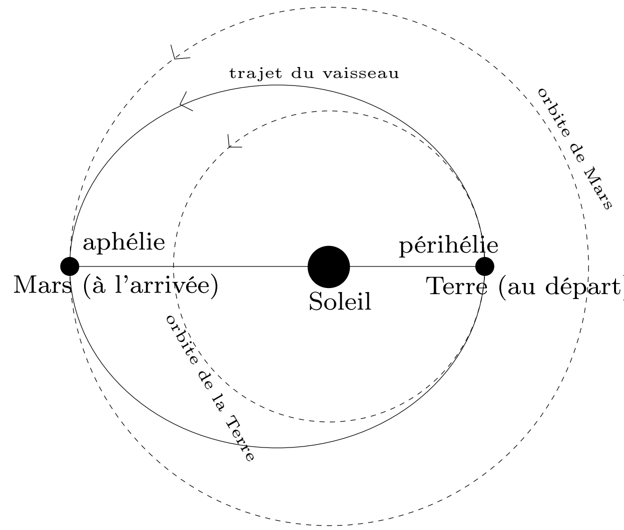
a) La période de révolution de Mars se calcule en utilisant la troisième loi de Kepler

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} = \text{constante}.$$

Soit T_T et T_M les périodes de révolution de la Terre et de Mars respectivement, on a

$$\frac{T_T^2}{(2R_T)^3} = \frac{T_M^2}{(2R_M)^3}$$

$$\Rightarrow \quad T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.874 \text{ années}.$$



On a utilisé le fait que les orbites sont circulaires et donc le grand axe de l'ellipse est égal au diamètre du cercle.

b) La vitesse de la Terre sur son orbite est donnée par

$$v_T = \Omega_T R_T = \frac{2\pi}{T_T} R_T = 2\pi \frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ année}} = \frac{2\pi \times 149.6 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} \simeq 29.8 \times 10^3 \text{ m/s} = 107300 \text{ km/h}.$$

Similairement, pour Mars

$$v_M = \Omega_M R_M = \frac{2\pi}{T_M} R_M \simeq 24.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 87120 \text{ km/h}.$$

c) On calcule la durée du voyage en utilisant à nouveau la troisième loi de Kepler

$$\frac{(T_T)^2}{(2R_T)^3} = \frac{(T_{\text{vaisseau}})^2}{(A)^3},$$

où $A = R_T + R_M$ est le grand axe de l'ellipse. La période du vaisseau est donc donnée par

$$T_{\text{vaisseau}} = T_T \Big(\frac{R_T + R_M}{2R_T}\Big)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.414 \text{ années}.$$

Pour atteindre Mars, on parcourra la moitié de cette orbite. La durée du voyage T_{voyage} sera donc égale à 0.707 années, c'est-à-dire 258 jours.

d) Pour déterminer les vitesses au départ $v_{\text{dép}}$ et à l'arrivée v_{arr}, nous avons besoin de deux équations. La première est la conservation du moment cinétique du vaisseau par rapport au Soleil entre le point de départ et le point d'arrivée (en effet, par hypothèse le vaisseau ne subit que la force d'attraction du Soleil, qui est centrale). Ceci donne :

$$R_T m v_{\text{dép}} = R_M m v_{\text{arr}}, \tag{8}$$

où m est la masse du vaisseau. La deuxième équation est la conservation de l'énergie mécanique du vaisseau entre le point de départ et le point d'arrivée :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{dép}}^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2}mv_{\text{arr}}^2 - \frac{GMm}{R_M},$$

que l'on récrit

$$\frac{1}{2}\left(v_{\text{dép}}^2 - v_{\text{arr}}^2\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right), \tag{9}$$

où M est la masse du Soleil.

— Vitesse de départ : En combinant les équations (8) et (9), on trouve

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2\left(1 - \frac{R_T^2}{R_M^2}\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right),$$

qui se récrit, en utilisant $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2 R_T^2\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{10}$$

On remarque que cette équation est aussi valable pour la Terre, sur son orbite circulaire :

$$\frac{1}{2}v_T^2 R_T^2 \frac{2}{R_T} = v_T^2 R_T = GM. \tag{11}$$

En combinant (10) et (11) on trouve

$$v_{\text{dép}} = v_T\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_T}{R_M}}}. \tag{12}$$

<u>Remarque :</u> On peut également trouver l'équation (11) après projection de la deuxième loi de Newton appliquée au système "Terre" soumis à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$M_T\frac{v_T^2}{R_T} = \frac{GM_TM}{R_T^2},$$

où M_T est la masse de la Terre.

— Vitesse d'arrivée : On fait le même raisonnement que pour la vitesse de départ. On combine les équations (8) et (9) pour exprimer la vitesse d'arrivée :

$$\frac{1}{2}v_{\text{arr}}^2 R_M^2\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{13}$$

L'équation (13) est valable pour Mars sur son orbite circulaire, on trouve donc

$$\frac{1}{2}v_M^2 R_M^2 \frac{2}{R_M} = v_M^2 R_M = GM. \tag{14}$$

On combine (13) et (14) pour obtenir :

$$v_{\text{arr}} = v_M\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_M}{R_T}}}. \tag{15}$$

— La vitesse à donner au vaisseau au départ *par rapport à la Terre* est la différence entre la vitesse orbitale v_{dep} et la vitesse de la Terre v_T :

$$\Delta v_{\text{dép}} = v_{\text{dép}} - v_T = v_T \left(\sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_T}{R_M}}} - 1 \right).$$

De même, à son arrivée sur Mars, il faudra modifier la vitesse du vaisseau de

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_M - v_{\text{arr}} = v_M \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_M}{R_T}}} \right).$$

Numériquement, la vitesse qu'il faut donner au vaisseau au départ vaut

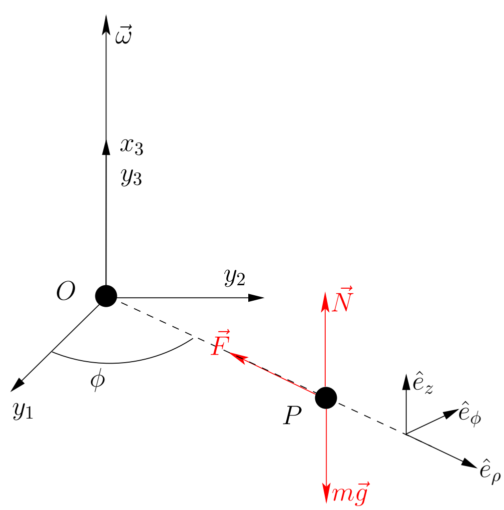
$$\Delta v_{\text{dép}} = v_{\text{dép}} - v_T \simeq +2.928 \text{ km/s}.$$

Et à l'arrivée sur Mars, il faudra modifier sa vitesse de

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_M - v_{arr} \simeq +2.636 \text{ km/s}.$$

On remarque que dans les deux cas, le vaisseau doit être accéléré !

2 Coureur sur carrousel



On définit, dans la référentiel absolu lié à la Terre, un repère fixe $Ox_1x_2x_3$, où O est le centre du carrousel et où l'axe x_3 est vertical vers le haut.
Le référentiel relatif du carrousel tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\hat{x}_3$ relativement au référentiel de la Terre. On définit un repère $Oy_1y_2y_3$ fixe dans le référentiel du carrousel, avec l'axe y_3 parallèle à x_3. Dans ce référentiel, on choisit les coordonnées cylindriques pour déterminer la position du coureur.

Dans le référentiel tournant, la position du coureur est $\overrightarrow{OP} = R\hat{e}_\rho$, la vitesse relative du coureur est $\vec{v}_{\text{rel}} = v\hat{e}_\phi$, et l'accélération relative est $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = v\dot{\hat{e}}_\phi = v(\Omega\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi)$, où $\Omega\hat{e}_z$ est la vitesse angulaire du coureur dans le référentiel tournant. Comme $v = R\Omega$, on a

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{16}$$

L'accélération centripète $\vec{a}_{\text{cen}}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_{\text{Cor}}$ sont

$$\vec{a}_{\text{cen}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \omega\hat{e}_z \wedge R\omega\hat{e}_\phi = -R\omega^2\hat{e}_\rho\,, \tag{17}$$

et

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega\hat{e}_z \wedge v\hat{e}_\phi = -2\omega v\hat{e}_\rho\,. \tag{18}$$

L'accélération absolue du coureur dans le référentiel fixe est donc

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{cen}} + \vec{a}_{\text{Cor}} = -\left(\frac{v^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega v\right)\hat{e}_\rho = -\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{19}$$

Les forces qui s'exercent sur le coureur sont :
- — le poids $\vec{P} = -mg\hat{e}_z$ du coureur, perpendiculaire au plan du carrousel.
- — la force de soutien $\vec{N} = N\hat{e}_z$ normale au carrousel.
- — la force $\vec{F}$ parallèle au sol, due au frottement statique des pieds du coureur sur le carrousel.

On applique la deuxième loi de Newton

$$\Sigma F^{\text{ext.}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} \tag{20}$$

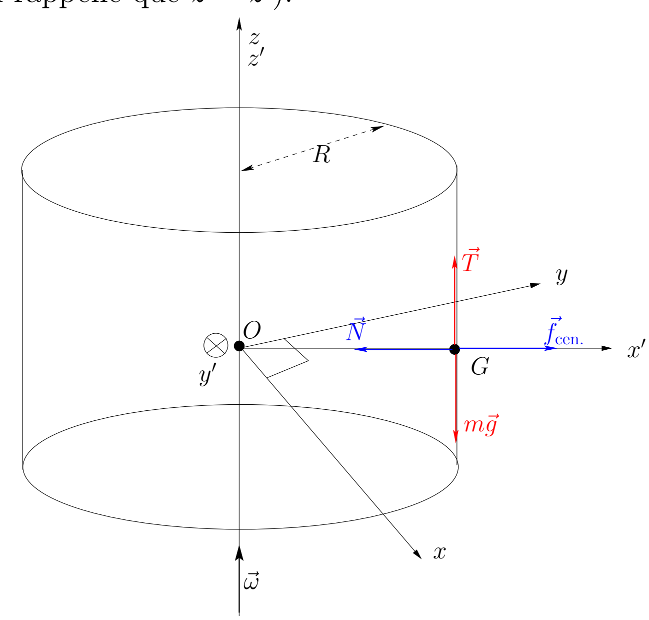
et on trouve que la force $\vec{F}$ est dirigée selon $\hat{e}_\rho$:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} = -m\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{21}$$

3 Le manège à plancher rétractable

a) Le manège est en rotation, le référentiel associé n'est donc pas d'inertie (galiléen). Si $(Oxyz)$ est le repère associé au référentiel de l'observateur hors manège, on nomme $(Ox'y'z)$ le repère tournant associé au manège, avec l'axe Ox' partant du centre du manège et passant par (le centre de gravité de) la personne et Oy' tel que le repère soit direct (on rappelle que $z = z'$).

Les forces s'appliquant sur la personne sont :
- — son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z = -mg\hat{e}_{z'}$
- — la force de liaison de la paroi, $\vec{N} = N_x\hat{e}_{x'}$
- — la force de frottement statique avec la paroi $\vec{T} = T_z\hat{e}_{z'}$
- — la force centrifuge $\vec{f}_{\text{cent.}} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG}) = mR\omega^2\hat{e}_{x'}$
- — les autres forces d'inertie sont nulles.



Pour que l'équilibre ait lieu, la somme de ces forces doit être nulle. Il en ressort que la force de réaction de la paroi doit compenser la force centrifuge, $N_x = -mR\omega^2$, et que la force de frottement statique doit compenser le poids, $T_z = mg$. On voit donc en particulier qu'on ne peut s'affranchir du frottement statique dans la description du problème.

b) On sait d'après les lois de Coulomb sur le frottement statique que la condition de non glissement de la personne le long de la paroi est $|T_z| \leq \mu |N_x|$. En utilisant les conditions d'équilibre de la question a), on en déduit que :

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}, \tag{22}$$

c'est à dire

$$\omega \geq \omega_{\min} \quad \text{avec} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mu \mathrm{R}}}. \tag{23}$$

4 Le rameur

Le problème est à une seule dimension. On considère le référentiel de la terre (absolu) lié à un repère Ox, où O est un point de la rive du fleuve et l'axe x dirigé dans le sens du courant, ainsi que le référentiel du fleuve (relatif) lié à un repère Ay, où A est un point du fleuve et l'axe y est parallèle à x.
La vitesse absolue du fleuve par rapport à Ox est v_f, et la norme de la vitesse relative du rameur par rapport au fleuve est v_r. La bouteille, une fois détachée du bateau, a une vitesse nulle relativement au fleuve.
De manière générale, la loi de transformation des vitesses pour un point P est

$$\vec{v}_P = \vec{v'}_P + \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\,, \tag{24}$$

où $\vec{v}_P$ est la vitesse absolue, $\vec{v'}_P$ la vitesse relative, $\vec{v}_A$ la vitesse absolue du point A, et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire. Dans ce problème à une dimension, $\omega = 0$, $v'_P = \pm v_r$, et $v_A = v_f$, et donc

$$v_P = \pm v_r + v_f\,. \tag{25}$$

Quand le rameur remonte le courant, sa vitesse relative est $-v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = -v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_1 est donc $x_{1,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1$. Remarque : $x_{1,\text{ram.}}$ est négatif si v_P est négatif.
Quand le rameur suit le courant, sa vitesse relative est $+v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = +v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_2 est donc $x_{2,\text{ram.}} = (v_r + v_f)t_2$.
La position absolue $x_{\text{ram.}}$ du rameur après un temps $t_1 + t_2$ est donc

$$x_{\text{ram.}}(t_1+t_2) = x_{1,\text{ram.}} + x_{2,\text{ram.}} = (-v_r+v_f)t_1 + (v_r+v_f)t_2 = v_r(t_2-t_1) + v_f(t_1+t_2)\,. \tag{26}$$

La bouteille a une vitesse relative nulle, et donc sa vitesse absolue est égale à la vitesse v_f du fleuve. Après un temps $t_1 + t_2$, sa position est donc

$$x_{\text{bout.}}(t_1+t_2) = v_f(t_1+t_2)\,. \tag{27}$$

Puisque après le temps t_1+t_2 le rameur et la bouteille ont la même coordonnée absolue ($x_{\text{ram.}} = x_{\text{bout.}} = x$), on peut égaliser les équations (26) et (27). On en déduit que $t_1 = t_2 \equiv t$. En substituant ce résultat dans l'équation (27), on trouve

$$x = v_f 2t \Rightarrow v_f = \frac{x}{2t}\,. \tag{28}$$

Numériquement, on obtient

$$v_f = \frac{1 \text{ km}}{2 \text{ heures}} = 0.5 \text{ km/h}\,.$$

<u>Solution alternative :</u>

Plaçons-nous dans un référentiel lié à la bouteille (ou au fleuve). Dans ce cas, tout se passe comme si l'on se trouvait sur un lac (sans courant). La vitesse du rameur dans ce référentiel est v_r et ne dépend pas de la direction dans laquelle il se déplace (rappelons-nous que tout se passe comme si c'était un lac !). Le rameur s'éloigne donc de la bouteille pendant une heure. Il constate alors la perte et revient en arrière. Il doit donc à nouveau ramer pendant une heure pour rattraper la bouteille, qui n'a pas bougé dans notre référentiel !

Donc deux heures se seront écoulées entre le moment où la bouteille se détache et le moment où le rameur la récupère. Si dans un référentiel lié à la rive (ou au pont) la bouteille a parcouru 1 km, c'est donc que sa vitesse (égale à celle du fleuve) est de 0.5 km/h.