Série 08 : Energie, moment cinétique

1 Encore l'araignée

L'araignée est un animal qui a une mauvaise mémoire : du cours de physique générale, elle n'a retenu que le théorème du moment cinétique. En se balançant au bout de son fil de longueur l à la manière d'un pendule, elle arrive tout de même à montrer que l'équation de son mouvement est $\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$. Comment a-t-elle fait ?

2 La table à trou

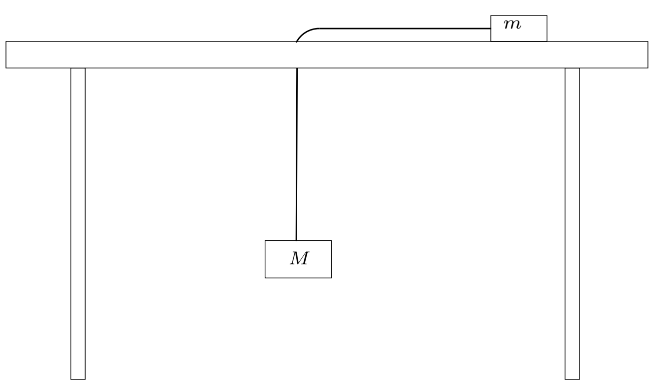
Soit une table horizontale percée d'un trou dans lequel peut circuler sans frottement un fil sans masse de longueur L. Le fil relie deux blocs, soumis à la pesanteur : 1) le bloc de masse m qui glisse sans frottement sur la table et possède une vitesse initiale qui n'est pas dans la direction du fil et 2) le bloc de masse M qui pend verticalement sous la table. Le fil reste tendu en tout temps.

a) Ecrire l'énergie mécanique totale des deux blocs en tenant compte de la longueur constante du fil.

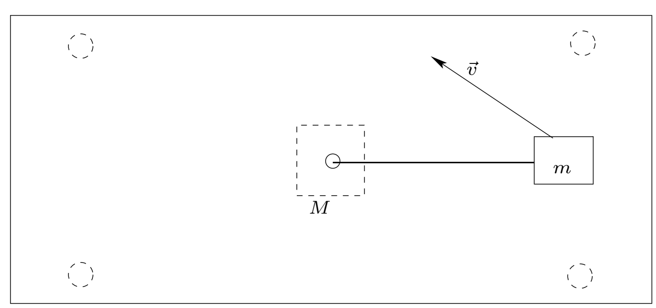
b) Quelles sont les grandeurs conservées, c'est-à-dire les intégrales premières du mouvement ?

c) Ecrire les équations du mouvement des deux blocs
— à partir des intégrales premières du mouvement ;
— à partir de la deuxième loi de Newton.

d) Réécrire l'équation différentielle trouvée en c) pour que la seule variable soit la distance entre le trou et la masse m. Démontrez alors que pour tout rayon $R \leq L$ il existe une trajectoire circulaire du bloc m pour une certaine valeur de sa vitesse initiale, que vous exprimerez en fonction des données du problème. Vérifiez votre résultat en raisonnant sur l'accélération centripète.



Vue de côté



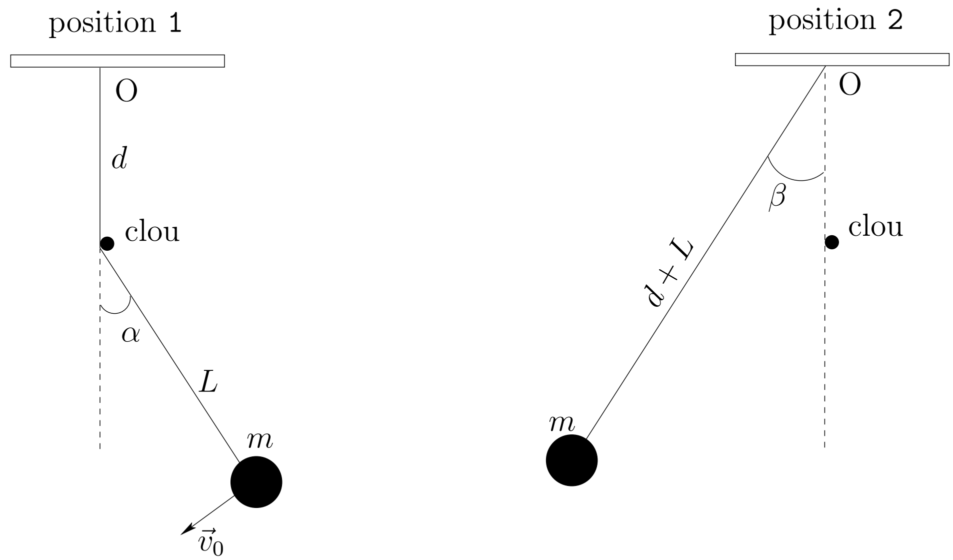
Vue de dessus

3 Le pendule asymétrique

Un pendule consiste en une bille de masse m reliée à un point fixe O par un fil sans masse de longueur constante. Un clou est placé à une distance d à la verticale sous le point O, de sorte que le pendule a une longueur L quand il oscille d'un côté de la verticale et une longueur $d + L$ de l'autre côté (voir dessin). On place la bille afin que le fil soit incliné d'un angle α ($\alpha < \pi/2$) avec la verticale du côté court du pendule (position 1), et on la lance avec une vitesse v_0. Au cours de son mouvement, considéré sans frottements, le fil reste toujours tendu. L'angle du pendule par rapport à la verticale atteint la valeur maximale β du côté long (position 2).

a) Quelle doit être la vitesse v_0 pour que l'angle β soit égal à l'angle α ?

b) Quelle est alors la vitesse maximale atteinte par la bille ?



4 Chute libre près de la Terre

Sur la Terre, de rayon R_T et de masse M_T, une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur $z(t = 0) = H$ au-dessus du niveau du sol. La force gravitationnelle qui s'exerce sur la bille est donnée par la loi de la gravitation universelle $\vec{F} = -\frac{G\,M_T\,m}{(R_T+z)^2}\hat{e}_z$ où $\hat{e}_z$ est orienté selon la verticale ascendante. On néglige les frottements de l'air.

a) Ecrire l'équation du mouvement de la bille.

b) Obtenir l'expression de l'énergie mécanique comme une intégrale première du mouvement. Utiliser les conditions initiales pour déterminer la constante d'intégration.

c) Quelle est la vitesse de la bille quand elle arrive au niveau du sol ?

d) *(facultatif)* Calculer la différence relative $(\Delta v/v)$ de cette vitesse avec la vitesse que vous auriez obtenue en utilisant une accélération gravitationnelle constante $g = GM_T/R_T^2$.
Indication : $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$, pour $\epsilon \ll 1$.
Application numérique : $h = 1000$ m, $R_T = 6371$ km, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, masse terrestre : $M_T = 5.9 \cdot 10^{24}$ kg.

Eléments de réponse

Exercice 2 :

- a) $E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + Mg(\rho - L)$
- b) Deux grandeurs conservées dont $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$
- c) $(M+m)\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + Mg = 0$
- d) $v^2 = \frac{Mg}{m}R$

Exercice 3 :

- a) $v_0 = \sqrt{2gd(1-\cos\alpha)}$
- b) $v_{\max} = \sqrt{2g(d+L)(1-\cos\alpha)}$

Exercice 4 :

- b) $E(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}+z}$
- c) Au niveau du sol $v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}\left(\frac{H}{R_T+H}\right)}$
- d) La différence relative vaut $\frac{\Delta v}{v} \approx -8 \cdot 10^{-5} < 0.01\%$