

Série 04 : Coordonnées cylindriques et sphériques, Contraintes**Exercices d'introduction****A Changement de base** [* 15 min]

Soit un vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans un repère $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ s'écrivent $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Comment s'écrira ce vecteur dans un repère $O\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$ où les axes $\hat{z}$ et $\hat{z}'$ sont identiques et où θ est l'angle entre $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ ainsi qu'entre $\hat{y}$ et $\hat{y}'$?

B Système de coordonnées sphériques [* 30 min]

- a) Exprimer les vecteurs de base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ en fonction des vecteurs de base en coordonnées sphériques $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta$.
- b) Déterminer l'expression du vecteur position $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur les axes cartésiens en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .
- c) En calculant la dérivée du vecteur position $\vec{OP}$, démontrer que l'expression de la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ est équivalente à l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques vue en cours.

Questions facultatives pour continuer à s'entraîner :

- d) Faire le même calcul pour obtenir l'expression de l'accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ en coordonnées sphériques.
- e) Refaire les mêmes calculs pour les coordonnées cylindriques.

C Expression des contraintes : équation d'une surface [** 10 min]

Ecrire en coordonnées cartésiennes (x, y, z) , cylindriques (ρ, ϕ, z) et sphériques (r, θ, ϕ) les équations des surfaces suivantes :

- sphère de rayon R centrée à l'origine
- cylindre parallèle à l'axe z , de longueur L et de rayon R , centré à l'origine
- cône de révolution de hauteur h et de rayon R à sa base, dont l'axe est parallèle à l'axe z , ouvert vers les z positifs, et dont le sommet est placé à l'origine O .

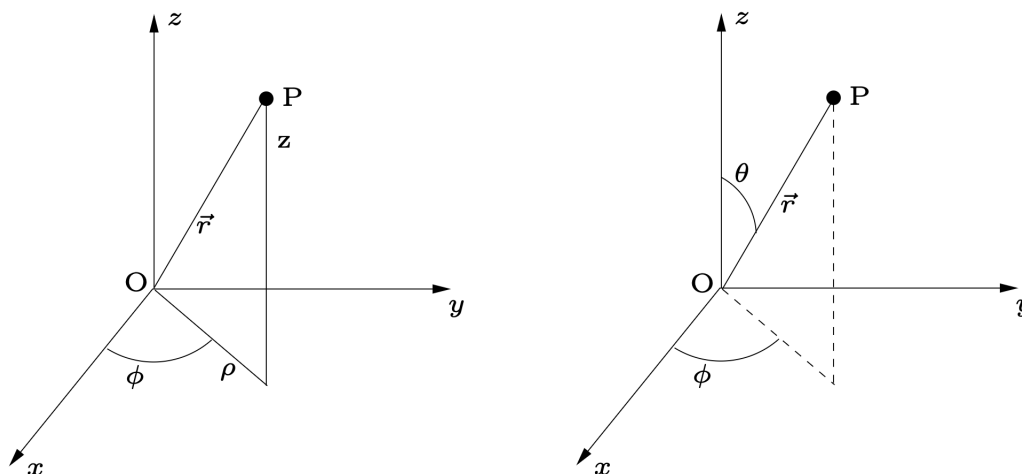


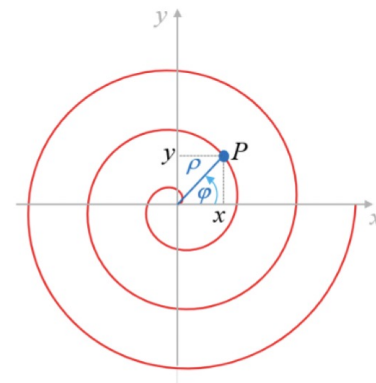
FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques (gauche) et sphériques (droite)

Problèmes

1 Spirale [** 10 min]

Le point P parcourt la spirale ci-contre en partant de l'origine en $t = 0$, à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\phi}$. Le rayon de la spirale s'accroît linéairement dans le temps.

- Exprimez le vecteur position $\vec{r}$ du point P en coordonnées cylindriques (ou polaires).
- Exprimez ρ en fonction de ω et de t (on pourra introduire une constante λ ayant la dimension d'une longueur [m]).
- Calculez les composantes de la vitesse suivant $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ en fonction de ω , t et λ .
- Faire de même pour les composantes de l'accélération. Peut-on en déduire facilement l'accélération centripète ou tangentielle?



2 Point sur un cylindre [*** 30 min]

Un point matériel est astreint à se déplacer sur un cylindre infiniment long et de rayon R . Le point matériel est attiré vers un point fixe O sur l'axe du cylindre par une force proportionnelle à la distance du point matériel au point O . Il n'y a pas d'effet de pesanteur ni de friction.

- Enumérer les forces subies par le point matériel. Faire un dessin représentant ces forces ainsi que le repère associé au système de coordonnées choisi.
- Ecrire les équations du mouvement et les projeter sur ce repère.
- Décrire le mouvement du point matériel. Pour cela, résoudre les équations du mouvement.
- Discuter le sens de la force de liaison en fonction des conditions initiales.

3 Araignée physicienne [*** 20 min]

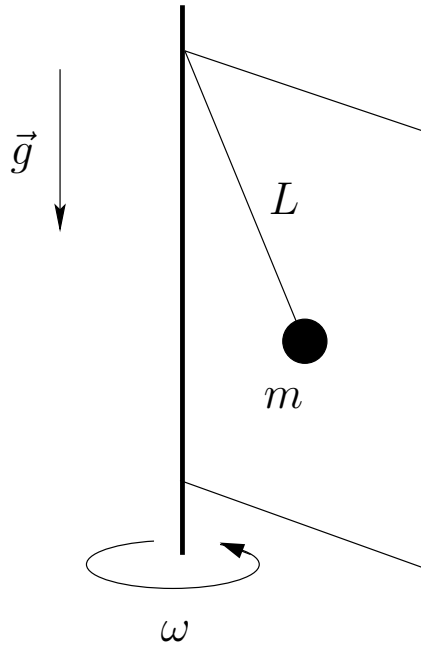
Une araignée est suspendue à un fil inextensible de longueur L attaché au plafond. Elle observe qu'elle tourne en rond autour de la verticale avec une vitesse de norme $|\vec{v}|$ constante. Grâce au cours qu'elle a suivi, elle peut montrer que la pulsation ω de son mouvement circulaire ne dépend que de la distance verticale h entre sa trajectoire et le plafond. Faites comme elle et calculez cette pulsation !

Si, au lieu de tourner en rond, l'araignée s'était simplement laissée balancer au bout du fil (dans un plan vertical), la période de son mouvement aurait-elle été plus grande ou plus petite ?

4 Pendule sur une porte [*** 20 min]

Un pendule formé d'un point matériel de masse m et d'un fil inextensible sans masse de longueur L est astreint à osciller dans le plan d'une porte qui tourne autour d'un axe vertical à vitesse angulaire ω constante. Le pendule est attaché à l'axe de rotation de la porte. Il n'y a pas de frottements.

- Ecrire les équations du mouvement du pendule.
- Vérifier qu'on retrouve les équations attendues dans les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $L \rightarrow 0$.



Eléments de réponse

Problème 1 : les composantes de l'accélération sont :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = -\lambda\omega^3 t$$

$$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = 2\lambda\omega^2$$

Problème 2 : La force de liaison obtenue est égale à

$$N_\rho = kR - mR\omega_1^2 = mR\left(\frac{k}{m} - \omega_1^2\right) = mR(\omega_0^2 - \omega_1^2) = cte.$$

Problème 3 : La pulsation est égale à :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Problème 4 :

Quand $\omega \rightarrow 0$, on obtient l'équation $mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$.

Quand $L \rightarrow 0$, on obtient à partir de la projection de l'équation du mouvement sur $\hat{e}_\theta$ que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.