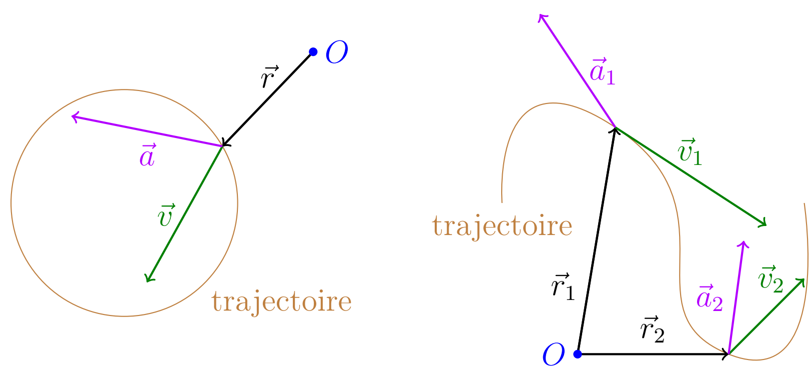
Série 03 : Cinématique

Rappel : Il est nécessaire d'avoir maitrisé les concepts de produit scalaire, produit vectoriel, projection de vecteurs, repères directs, avant de faire cette série ; cf. série 1.

Exercices d'introduction

A Vecteurs position, vitesse et accélération [* 5 min]

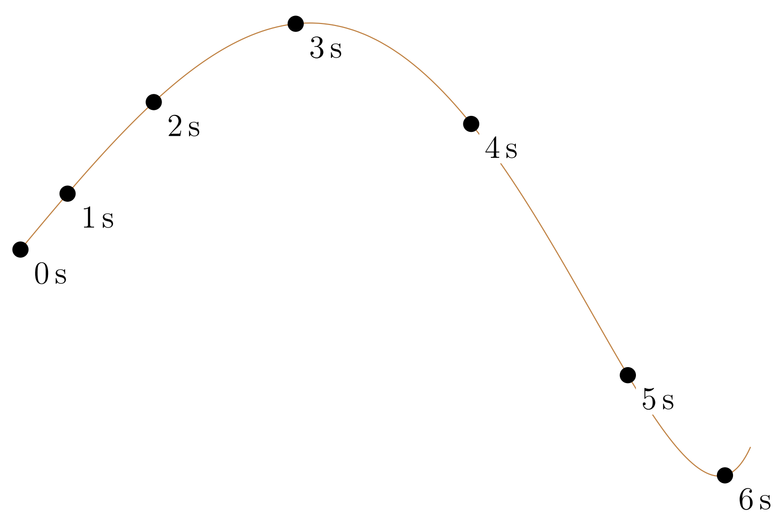
On considère les trajectoires de deux points matériels, comme représenté ci-dessous.



Lesquels des vecteurs position, vitesse et accélération indiqués sur la figure ne sont pas réalistes ?

B Vecteurs vitesse et accélération [* 10 min]

Sur la figure ci-dessous, on a représenté la trajectoire d'un objet et la position de ce dernier aux instants $t = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 s. L'objet n'a pas d'accélération au départ.



En visualisant le mouvement de l'objet, dessiner approximativement, à chacun de ces instants,

- le vecteur vitesse,
- le vecteur accélération tangentielle,
- le vecteur accélération normale.

C Formule de Poisson pour la dérivation de vecteurs de base [* 20 min]

On considère un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ qui varie dans l'espace au cours du temps.
Nous admettons qu'il existe un vecteur $\vec{\omega}$ tel que $\frac{d\vec{e_i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_i}$ pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$ (1).
Nous cherchons à nous convaincre que ces relations décrivent un mouvement de rotation du repère autour d'un axe orienté selon $\vec{\omega}$, à vitesse angulaire $\omega = |\vec{\omega}|$. On considère le cas simple où $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$, constant dans le temps.

a) Pour un vecteur arbitraire $\vec{r} = O\vec{M}$ lié au repère qui varie au cours du temps, de norme $\rho = |\vec{r}|$, écrire la formule de Poisson par rapport à $\vec{\omega}$.

b) Soit $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ (2), écrire explicitement le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$.

c) Écrire explicitement le système d'équations issu de (a), et identifier les éléments composante par composante trouvés dans (b). *(Hint : dériver explicitement l'expression de $\vec{r}$ donnée en (2) pour identifier les composantes direction par direction.)*

d) Résoudre le système d'équations différentielles trouvé en (c) pour exprimer $\vec{r}(t)$. *(Hint : identifier dans le système d'équations construit que : $\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)$ et $\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t)$)*

e) Vérifier que le vecteur arbitraire $\vec{r}$ décrit bel et bien un mouvement circulaire autour de l'axe Oz.

D Rotation d'un cube [** 25 min]

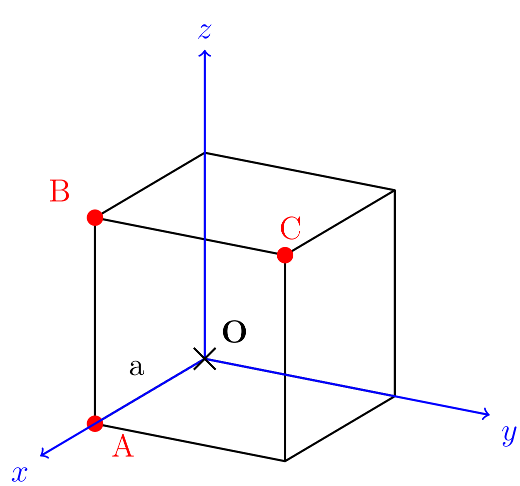


FIGURE 1 – Représentation schématique du cube à l'instant $t = 0$

On considère un cube de côté a. À $t = 0$ il est positionné comme sur la Fig. 1. On suppose qu'il est soumis à une rotation autour de O décrite par le vecteur :

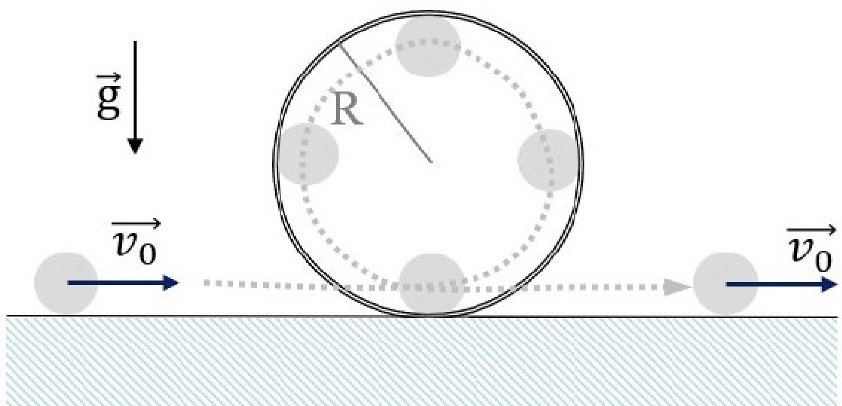
$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{e_x} + \omega_y\vec{e_y} + \omega_z\vec{e_z}$$

a) On suppose que $\vec{\omega}$ est indépendant du temps. Déterminer les vitesses et accélérations des sommets A, B, C du cube.

b) On suppose désormais que $\omega(\vec{t})$ est fonction du temps. Déterminer la vitesse et l'accélération des points A, B, C. Comparer aux résultats trouvés en (a).

E Looping [* 10 min]

Une bille (considérée comme un point matériel) est lancée à la vitesse v_0 sur un plan horizontal, soumise au champs de pesanteur. Elle entre ensuite dans un anneau circulaire de rayon R dans lequel elle fait un tour complet. Il n'y a aucun frottement et la bille ressort donc à la vitesse v_0 (il sera facile de démontrer cette affirmation lorsque nous aurons vu le concept d'énergie mécanique). On fait de plus l'hypothèse que la bille reste en contact avec la glissière à chaque instant.



a) Indiquez en chaque point (bille en grisé) les vecteurs accélération et vitesse sur le schéma.

b) Dessinez les composantes normale et tangentielle de l'accélération.

Problèmes

1 Accélération dans un virage [** 15 min]

Un conducteur initialement à l'arrêt veut effectuer un quart de tour sur une route. La trajectoire de son véhicule est un arc de cercle de rayon R, et son accélération tangentielle a_t est constante. Le véhicule effectue le quart de tour en un temps T.

a) Exprimer l'accélération tangentielle a_t en fonction des autres données du problème.

b) Quelle est la vitesse du véhicule après un quart de tour ?

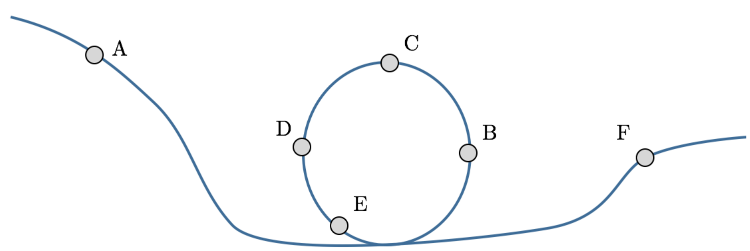
c) Quelle est l'accélération normale a_n du véhicule après un quart de tour ?

d) Après quel temps t_eq les accélérations tangentielle et normale sont-elles égales ?

2 Roller Coaster [** 20 min]

Un wagonnet de grand huit, soumis à son poids $m\vec{g}$, se déplace sur la piste dessinée ci-dessous. La vitesse initiale est suffisante pour que la vitesse du wagonnet soit non nulle en tout point de la trajectoire. Dessiner les vecteurs accélérations normales $\vec{a}_n$ et tangentielles $\vec{a}_t$ aux points A, B, C, D, E et F, pour les situations suivantes :

1. la piste se trouve dans un plan vertical et le wagonnet se déplace de A à F ;
2. la piste se trouve dans un plan vertical et le wagonnet se déplace de F à A ;
3. la piste se trouve dans un plan horizontal et le wagonnet se déplace de A à F.



3 Trajectoire elliptique [** 25 min]

Un point matériel de masse m se déplace dans le plan défini par le repère orthonormé Oxy de façon à ce que son vecteur position soit donné par

$$\vec{r} = C_1 \cos(\omega t)\, \hat{e}_x + C_2 \sin(\omega t)\, \hat{e}_y$$

où C_1, C_2 et ω sont des constantes positives et $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy.

a) Montrer que le point matériel parcourt une ellipse. À quoi correspondent les constantes C_1 et C_2 ? (*On rappelle que l'équation d'une ellipse de demi-axes A et B est :* $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.)

b) Esquissez les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ au long de la trajectoire. Montrer que si $C_1 \neq C_2$, les vecteurs $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ ne sont en général pas orthogonaux.

c) Donnez l'expression de la force déterminant ce mouvement.

d) Quelles sont les similitudes et différences avec la force gravitationnelle ? On rappelle que cette dernière s'exprime comme

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_{1\to 2}$$

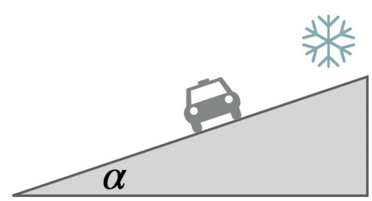
où $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ et $\hat{e}_{1\to 2} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/r$.

4 Virage relevé verglacé [*** 25 min]

Un véhicule s'engage dans un virage relevé (angle α par rapport à l'horizontal) et verglacé, de sorte qu'on peut négliger tout frottement, et la réaction de la piste est perpendiculaire à la surface de la piste.

a) Quelle vitesse v_0 doit-il avoir pour se maintenir à hauteur constante et réussir la courbe ? On notera R le rayon de courbure de la trajectoire (dans cet exemple R et v_0 sont constants). On pourra s'aider de vecteurs unitaires tangent $\hat{\tau}$ et normal $\hat{n}$ à la trajectoire.

b) Comparer au cas où la vitesse initiale est nulle (glissement sur un plan incliné). Dans quel cas la force sur les pneus est-elle la plus grande ?



Eléments de réponse

Problème 1 :
a) Utiliser l'abscisse curviligne. Quelle est la longueur du quart de cercle ?
b) Réponse : $\frac{\pi R}{T}$
d) Le temps t_{eq} vaut :

$$t_{\mathrm{eq}} = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \tag{1}$$

Problème 3 : La force qui détermine le mouvement est :

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t) \tag{2}$$

Problème 4 : La vitesse v_0 est :

$$|v_0| = \sqrt{R\, g\, \tan\alpha} \tag{3}$$