Série 2

Exercices d'introduction

A. Introduction aux équations différentielles [* 40 min]

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes, avec conditions initiales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

a) $\ddot{x}(t) = a$

b) $\ddot{x}(t) = a + bt$

c) $\ddot{x}(t) = a\cos(\omega t + \phi)$

d) $\ddot{x}(t) = a\sqrt{t} + be^{-\lambda t}$

e) $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0$, où m, b et k sont des constantes satisfaisant la condition $b^2 - 4km > 0$.

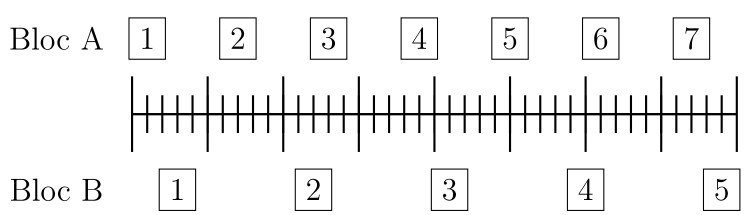
   i) Cherchez une solution sous la forme
   $$x(t) = e^{\gamma t}.$$
   Quelles sont les valeurs possibles de γ ?

   ii) Démontrer que, si $e^{\gamma_1 t}$ et $e^{\gamma_2 t}$ sont solutions, alors
   $$x(t) = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}$$
   est aussi une solution, où A et B sont des constantes.

   iii) Déterminer A et B pour que la solution vérifie les conditions initiales.

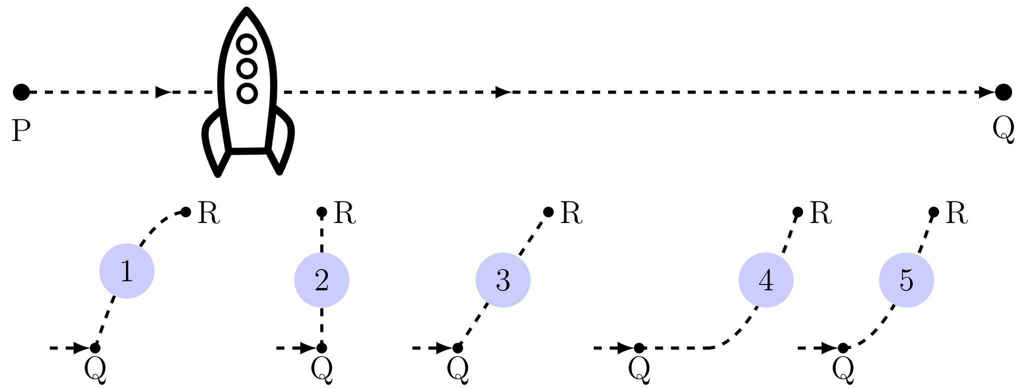
B. Blocs en mouvement [* 5 min]

Les carrés numérotés de la figure ci-dessous représentent les positions de deux blocs à des intervalles de temps Δt. Les blocs se déplacent vers la droite. Comparez l'accélération des deux blocs.



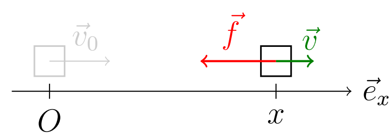
C. Vaisseau spatial [* 5 min]

Un vaisseau spatial dérive de côté dans l'espace entre les points P et Q. Le vaisseau n'est soumis à aucune force extérieure. A partir du point Q, le moteur du vaisseau démarre et produit une accélération constante à angle droit par rapport à PQ. Cette accélération est maintenue jusqu'à ce que le vaisseau atteigne un point R. Laquelle des trajectoires proposées représente le mieux la trajectoire du vaisseau ?



D. Mouvement unidimensionnel [** 15 min]

Un objet de masse m glisse sans frottement sur le sol à vitesse constante $\vec{v}_0$. A l'instant $t_0 = 0$, il passe à l'origine O et subit ensuite une force $\vec{f} = -f_0\vec{e}_x =$ cte constante et opposée à la vitesse.



Ecrire la deuxième loi de Newton pour cet objet et en déduire sa vitesse $v(t)$ et sa position $x(t)$ selon $\vec{e}_x$.

1 Le saut du saumon [** 30 min]

a) Déterminez la solution générale de l'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré, le long d'un axe x,

$$\ddot{x} = a,$$

où a est une constante. Quelle est l'interprétation physique des deux constantes d'intégration qui apparaissent dans la solution ?

b) Un saumon saute hors d'un lac avec une vitesse initiale v_0 dirigée verticalement vers le haut. Il subit une accélération constante égale à g, dirigée vers le bas, due à la pesanteur. Représenter graphiquement la position verticale du poisson en fonction du temps, ainsi que sa vitesse en fonction du temps. Indiquer sur les graphiques l'instant t_{max} ou le saumon atteint le sommet de sa trajectoire, et l'instant t_{saut} où il retombe dans l'eau.

c) Quelle hauteur maximale le saumon atteindra-t-il ? Combien de temps passera-t-il en l'air ?
Application numérique : $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ et $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

2 Le lièvre et la tortue [** 30 min]

Le lièvre et la tortue font une course sur une distance L. La tortue démarre avec une vitesse constante v_{t} et le lièvre également avec une vitesse constante v_{l} (le lièvre ne prend pas la course au sérieux, donc $v_{\mathrm{l}} < v_{\mathrm{t}}$). Lorsque la tortue arrive sur un pont situé à une distance $L' < L$ du départ, le lièvre réalise son erreur et accélère avec une accélération constante a.

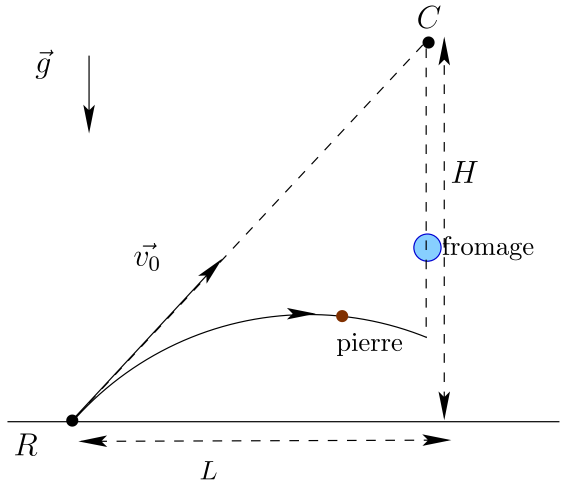
a) Représenter sur un graphique les positions de la tortue et du lièvre en fonction du temps.

b) Mettre les données sous forme mathématique et donner la condition sur l'accélération a pour que le lièvre arrive à remporter la course.

c) Vérifier que le résultat obtenu est cohérent au niveau des unités. Choisir des cas limites pertinents et vérifier qu'en faisant tendre la solution vers ces cas limites, on obtient bien ce à quoi on s'attend.

3 Le corbeau et le renard [*** 40 min]

Quelques jours après leurs aventures contées dans la fable, le corbeau et le renard se rencontrent à nouveau. Enrichi par ses mésaventures, le corbeau est bien décidé à ne pas se laisser prendre une seconde fois au piège des flatteries du renard. Cependant, le renard tient absolument à obtenir un deuxième fromage. Il choisit donc une technique plus simple et lance une pierre en direction du corbeau pour l'effrayer. La méthode est efficace car sitôt la pierre lancée, le corbeau lâche son fromage une nouvelle fois.
L'arbre sur lequel se trouve le corbeau a une hauteur H et son pied se trouve à une distance L du renard. La norme de la vitesse initiale de la pierre vaut v_0.



a) Si on néglige tout frottement, montrer que la pierre et le fromage entreront en collision et calculer l'instant de cette collision. Le résultat dépend-il de g ? Expliquer pourquoi. Que se passe-t-il si le renard vise à côté du corbeau ?

b) Quelle est la vitesse v_0 minimale pour que la collision ait bien lieu au-dessus du sol ?

c) Vérifier que les résultats obtenus sont cohérents au niveau des unités. Choisir des cas limites pertinents et vérifier qu'en faisant tendre la solution vers ces cas limites, on obtient bien ce à quoi on s'attend.

4 Le canard paresseux [*** 25 min]

On se propose d'étudier le mouvement d'un canard paresseux. Il nage en ligne droite sur le lac Léman à vitesse constante lorsque qu'il décide d'arrêter tout effort. Le but est de déterminer la distance qu'il parcourt avant de s'arrêter complètement. Pour cela, on considère que le canard, de masse m, a un mouvement rectiligne et que l'écoulement de l'eau autour de lui est en régime laminaire, causant une force $-b\,\vec{v}$ ou b est une constante et $\vec{v}$ sa vitesse instantanée. On néglige les frottements de l'air, car beaucoup plus faibles que ceux de l'eau.

a) Exprimez l'équation différentielle du mouvement.

b) On pose $t = 0$ l'instant où le canard arrête son effort, et v_0 sa vitesse à cet instant. Intégrez l'équation différentielle du mouvement et exprimez :
i. la vitesse en fonction du temps.
ii. la position en fonction du temps.

c) Exprimez la distance que le canard parcourt avant de s'arrêter en fonction de v_0, b et m.

Indications et éléments de réponse

1.b. L'axe horizontal de ces graphs doit bien être le temps, l'axe vertical la hauteur ou la vitesse.

1.c. Déterminer d'abord le temps t_{max} auquel le saumon atteint le sommet de sa trajectoire. Exprimer pour cela une condition sur la vitesse $v(t_{\text{max}})$. Pour la durée du saut t_{saut}, exprimer une condition sur $x(t_{\text{saut}})$. A.N. $t_{\text{saut}} = 0.6\,\text{s}$ et $h_{\text{max}} = 0.45\,\text{m}$.

2.a. On pourra définir les temps suivants
- $t_0 = 0$, l'instant du départ,
- t_1, l'instant auquel la tortue atteint le pont et où le lièvre commence à accélérer,
- t_2 l'instant de l'arrivée de la tortue,
- et les intervalles de temps $\Delta t = t_1 - t_0$ et $\Delta t' = t_2 - t_1$.

et choisir un axe x dans le sens de la course, lié au sol comme référentiel.

2.b. Le lièvre remporte la course si $a > \frac{2v_{\text{t}}L(v_{\text{t}}-v_{\text{l}})}{(L-L')^2}$.

2.c. Etudier les cas limites suivants :
- Si la tortue a une vitesse beaucoup plus grande que celle du lièvre avant le pont
- Si la tortue a une vitesse égale à celle du lièvre avant le pont
- Si le pont se situe très près de la ligne d'arrivée

3.a. Établir d'abord les équations horaires de la pierre $\vec{r_P}(t) = \begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix}$ et du fromage $\vec{r_F}(t) = \begin{pmatrix} x_F(t) \\ y_F(t) \end{pmatrix}$, tous deux correspondant à des trajectoires balistiques, mais avec des conditions initiales différentes. Pour qu'il y ait une collision entre la pierre et le fromage au temps $t = t_{coll}$, que doivent satisfaire $\vec{r_P}(t_{coll})$ et $\vec{r_F}(t_{coll})$? Montrer qu'il existe bien une valeur de $t = t_{coll}$ satisfaisante. Dans les calculs on pourra utiliser $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{H}{L}$.

3.b. Résultat : $v_0 > \sqrt{g\frac{L^2+H^2}{2H}}$

3.c. Considérer les cas limites suivants :
- v_0 très grand (tend vers l'infini)
- v_0 tend vers zéro
- g tend vers zéro ('apesanteur')
- H tend vers zéro

4.a. Montrer que $\frac{\dot{v_x}}{v_x} = -\lambda$ avec λ fonction des paramètres du problème.

4.b. Pour une fonction u dérivable on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. Trouver donc $\ln v_x$ puis prendre l'exponentielle.

4.c. Résultat : $D = \frac{m\,v_0}{b}$