

## Corrigé Série 1 : Rappels mathématiques

### 1 Dérivation des fonctions

1.  $\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$
  2.  $\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$
  3. (\*)  $\frac{d}{dt} \tan(t) = \left( \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \right)' = \frac{\cos(t) \cos(t) + \sin(t) \sin(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
  4.  $\frac{d}{dt} \ln(t) = \frac{1}{t}$
  5.  $\frac{d}{dt} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$
  6.  $\frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}$
  7.  $\frac{d}{dt} \sin(t) \cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
  8.  $\frac{d}{dt} t \cos(t) = \cos(t) - t \sin(t)$
  9. (\*\*)  $\frac{d}{dt} t \cos(t) \sin(t) = \cos(t) \sin(t) - t \sin^2(t) + t \cos^2(t)$
  10.  $\frac{d}{dt} \sin(t^2) = 2t \cos(t^2)$
- \*  $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + f' \cdot \frac{1}{g} = f \left(\frac{-g'}{g^2}\right) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- \*\*  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

### 2 Dérivation des fonctions composées

1.  $\frac{d}{d\theta} \cos(\theta) = -\sin \theta$  ;  $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = \dot{\theta}(-\sin \theta) = -\omega \sin \theta$
2.  $\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = \cos \theta$  ;  $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \omega \cos \theta$
3.  $\frac{d}{d\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})$  ;  $\frac{d}{dt} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\omega}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\omega}{2}(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})$
4.  $\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$   
 $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \omega \cos^2 \theta - \omega \sin^2 \theta = \omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

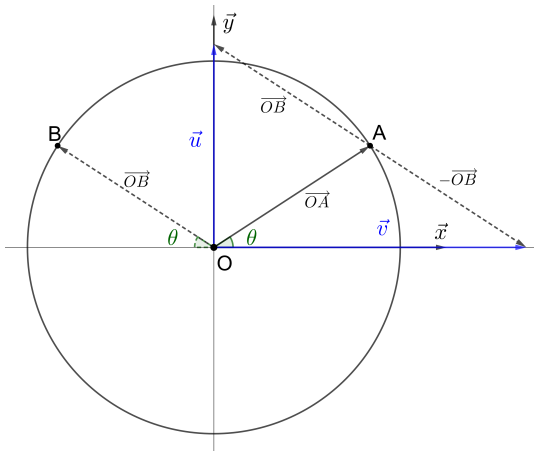
### 3 Dérivations (le retour !)

1.  $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt} (-\sin(\theta(t))) = -\dot{\theta} \sin(\theta)$
2.  $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta)$
3.  $\frac{d}{dt} \tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1 + \tan^2(\theta))$
4.  $\frac{d}{dt} \ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5.  $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \dot{\theta} \cos^2(\theta) - \dot{\theta} \sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
6.  $\frac{d}{dt} \theta^\alpha = \alpha \dot{\theta} \theta^{\alpha-1}$
7.  $\frac{d}{dt} \theta \cos(\theta) \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) - \theta \dot{\theta} \sin^2(\theta) + \theta \dot{\theta} \cos^2(\theta)$

### 4 Vecteurs

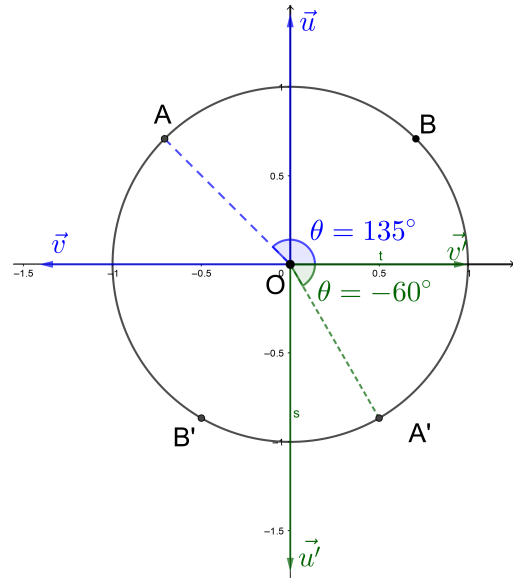
1.  $\vec{OA} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  et  $\vec{OB} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

2.



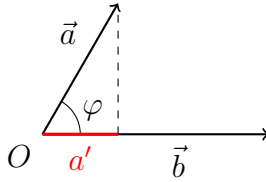
3.  $\vec{u} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = R \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

4.



## 5 Produit scalaire

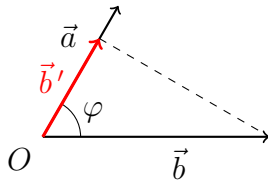
1.



Par trigonométrie, la longueur cherchée est

$$a' = ||\vec{a}|| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{||\vec{b}||}.$$

2.

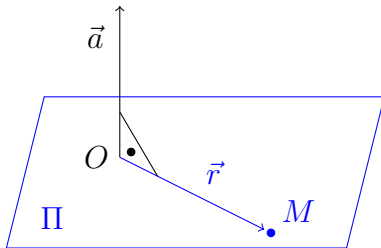


Le vecteur cherché est la projection algébrique (avec signe) multipliant le vecteur unitaire parallèle et de même sens que  $\vec{a}$

$$\vec{b}' = ||\vec{b}|| \cos \varphi \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||^2} \vec{a}.$$

Remarque :  $\vec{b}'$  et  $\vec{a}$  sont opposés si  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos \varphi < 0$ .

3.



Condition d'orthogonalité :  $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$ .

## 6 Produit vectoriel

1. Par définition du produit vectoriel, l'aire est la norme  $||\vec{a} \times \vec{b}||$ .

2. L'aire d'un parallélogramme étant « base fois hauteur »,  $h = \frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{||\vec{b}||}$ .

## 7 Unités et analyse dimensionnelle

1. La dimension de la constante de la gravitation universelle  $G$  et son unité dans le système SI sont respectivement,

$$G = \frac{L^3}{M T^2} \quad \text{ainsi} \quad G = \left[ \frac{m^3}{kg s^2} \right] \quad (1)$$

2. Attention ! Il est important que tous les termes de l'expression donnent des mètres.

- (a)  $\frac{m \cdot s^{-2}}{m \cdot s^{-1}} \Rightarrow s^{-1} \neq m$  non
- (b)  $\frac{m \cdot s^{-1}}{m \cdot s^{-2}} \Rightarrow s \neq m$  non
- (c)  $\frac{m^2 \cdot s^{-4}}{m \cdot s^{-1}} \Rightarrow m \cdot s^{-3} \neq m$  non

(d)  $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} \Rightarrow \text{m}$  oui !

L'expression (d) est donc la seule qui soit compatible avec la contrainte dimensionnelle.