Série 1 : Rappels mathématiques pour la physique

1 Dérivation des fonctions

Calculer les dérivées par rapport au temps (t) des fonctions suivantes :

1. $\cos(t)$
2. $\sin(t)$
3. $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$
4. $\ln(t)$
5. $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$
6. t^{α} $(\alpha \neq 0)$
7. $\sin(t)\cos(t)$
8. $t\cos(t)$
9. $t\cos(t)\sin(t)$
10. $\sin(t^2)$

2 Dérivation des fonctions composées

Soit $\theta(t) = \omega t$ une fonction du temps. Calculer les dérivées par rapport à θ et par rapport au temps des fonctions :

1. $\cos(\theta)$
2. $\sin(\theta)$
3. $\tan(\theta/2)$
4. $\sin(\theta)\cos(\theta)$

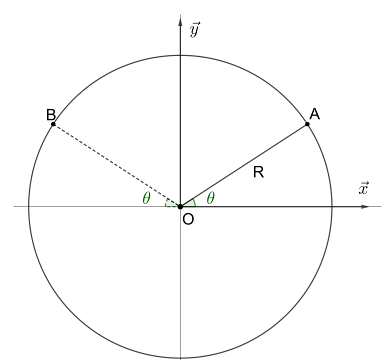
3 Dérivations (le retour !)

Soit θ une fonction du temps $\theta(t)$ quelconque. On notera $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ la dérivée de θ par rapport au temps. *(Attention, on n'a pas explicité $\theta(t)$, il est ici implicite que θ est une fonction du temps t)*
Calculer la dérivée par rapport au temps de $f(t)$ pour :

1. $\cos(\theta)$
2. $\sin(\theta)$
3. $\tan(\theta)$
4. $\ln(\theta)$
5. $\sin(\theta)\cos(\theta)$
6. θ^{α}
7. $\theta\cos(\theta)\sin(\theta)$

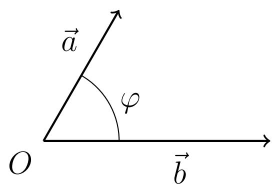
4 Vecteurs

On considère les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ suivants (A et B sur un cercle de rayon R) :



1. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de R et θ.
2. Représenter $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
3. Exprimer les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
4. Refaire le dessin avec $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$

5 Produit scalaire



Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace.

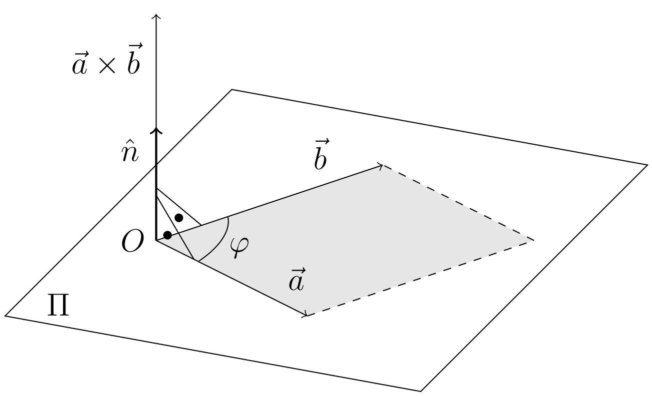
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos\varphi}$$

où φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Pour chacune des questions ci-dessous, faire une esquisse et donner la réponse en fonction des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et de leurs normes.

1. Déterminer la longueur de la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.
2. Exprimer le vecteur obtenu par projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Dans quel cas cette projection et $\vec{a}$ sont-ils opposés ?
3. Soit $\vec{r}$ un vecteur quelconque de l'espace. A quelle condition doit-il satisfaire pour être normal à $\vec{a}$?

6 Produit vectoriel



Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit vectoriel est donné par (les notations $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{a} \times \vec{b}$ sont équivalentes) :

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,|\sin\varphi|\,\hat{n}}$$

où φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, de sens donné par la règle du tire-bouchon (ou des trois doigts, ou de la main droite).

Pour chacune des questions ci-dessous, donner la réponse en fonction des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{a} \times \vec{b}$.

1. Donner l'aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
2. En prenant $\vec{b}$ comme base, donner la hauteur de ce parallélogramme.

7 Unités et analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est un concept de la physique, qui aide à comprendre des situations physiques qui comportent plusieurs grandeurs physiques. Ce concept est utile pour vérifier l'exactitude d'une équation physique. Il est aussi utilisé afin de créer une hypothèse pour la liaison entre plusieurs grandeurs physiques qui peut être ensuite vérifiée expérimentalement.
A chaque grandeur physique correspond une dimension, associée en mécanique à la longueur (L), la masse (M), le temps (T) et leurs compositions. Par exemple la dimension de la grandeur physique "vitesse" v est une longueur divisée par un temps (L/T).
L'unité de mesure d'une grandeur physique et sa dimension sont bien sûr liées mais elles ne sont pas identiques. Les unités de mesure sont définies par des conventions (par exemple le Système international d'unités, abrégé SI). Suivant les différentes conventions, la longueur peut avoir plusieurs unités comme un pouce ou un mètre mais elle a toujours la même dimension : L. Avec la convention SI, les unités de L, M et T sont respectivement mètre (m), kilogramme (kg) et seconde (s). Ces dimensions, respectivement unités, servent de base pour exprimer les unités de toutes les grandeurs mécaniques. Par exemple, la vitesse :

$$v = \frac{L}{T} \qquad \text{ainsi} \qquad v = \left[\frac{m}{s}\right]$$

Concepts de base de l'analyse dimensionnelle :

— Seules des grandeurs physiques avec les mêmes dimensions (unités) peuvent être additionnées, soustraites, comparées ou égalées.
— Les grandeurs avec des dimensions différentes peuvent être seulement multipliées ou divisées.
— Quand une grandeur est élevée à un exposant rationnel sa dimension est élevée au même exposant.
— Les exposants sont toujours sans dimensions.
— Les fonctions mathématiques comme par exemple les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques etc.... exigent des arguments sans dimension.
— Toutes les équations doivent être homogènes, c'est-à-dire que la dimension du côté gauche de l'égalité doit être la même que celle du côté droit.

En raison de simplifications, on utilisera pour l'analyse des dimensions les unités SI pour nommer leur dimensions correspondantes : L $\rightarrow m$ (mètre), M $\rightarrow kg$ (kilogramme), T $\rightarrow s$ (seconde).

Utiliser les notions de l'analyse dimensionnelle pour répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la dimension de la constante universelle de la gravitation G pour que l'expression de la force de gravité F_G (qui a la dimension du produit d'une masse et d'une accélération) soit homogène et en déduire l'unité correspondante dans le système SI :

$$F_G = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}\,,$$

   où M_1 et M_2 sont deux masses séparées d'une distance r.

2. Quelle est la bonne formule pour la portée D d'un projectile lancé à la vitesse v_0 sous un angle α par rapport à l'horizontale, avec g accélération de la pesanteur :

   (a) $D = \frac{g}{v_0}\sin 2\alpha$
   (b) $D = \frac{v_0}{g}\sin 2\alpha$
   (a) $D = \frac{g^2}{v_0}\sin 2\alpha$
   (b) $D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$