

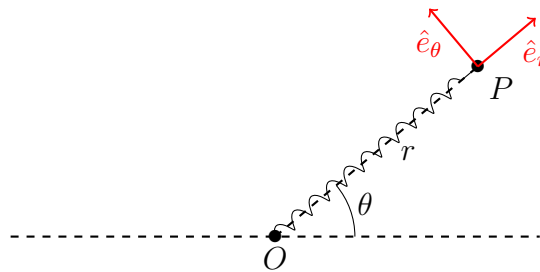
Corrigé du Minitest 3

Ressort fragile – (11 points)

a) (4 points au total)

Tant que le ressort n'est pas cassé la force est centrale car toujours dirigée suivant \vec{OP} , donc le moment cinétique est conservé. Lorsque le ressort est cassé aucune force n'est plus exercée sur le point matériel et donc le moment cinétique est également conservé. Dans \vec{L}_O est conservé dans tous les cas 1 point_A. Le mouvement s'effectue donc dans un plan 1 point_B, le plan perpendiculaire à \vec{L}_O .

On travaille en coordonnées polaires dans ce plan :



Dans ce cas :

$$\begin{cases} \vec{r} = r\hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \end{cases} \quad \text{1 point } \text{C} \quad (1)$$

et le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z. \quad \text{1 point } \text{D} \quad (2)$$

b) (2 points au total)

La force exercée par le ressort est conservative, donc pour un mouvement restreint dans la région $r \leq R$, l'énergie est conservée, et l'énergie potentielle est celle d'un ressort d'allongement r et donc $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$. 1 point_E

L'énergie mécanique totale s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} + V(r). \quad \text{1 point } \text{F} \quad (3)$$

c) (5 points au total)

On cherche une condition pour laquelle $r(t) \leq R$ pour tout temps t . Les trajectoires qui vérifient cette condition explorent uniquement le cas $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$. Comme l'énergie mécanique totale est

conservée 1 point_G, pour une énergie initiale E et un moment cinétique initial L , on a en tout temps

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \geq 0 \quad \text{1 point}_H \quad (4)$$

et les distances extrémales r_e atteints au cours du mouvement vérifient

$$E - \frac{L^2}{2mr_e^2} - \frac{1}{2}kr_e^2 = 0 \quad \text{1 point}_I \quad (5)$$

La condition cherchée est $r_e \leq R$. On doit résoudre

$$Er_e^2 - \frac{L^2}{2m} - \frac{1}{2}kr_e^4 = 0 \quad (6)$$

qui est une équation du second degré pour r_e^2 .

$$\Delta = E^2 - \frac{L^2k}{m} \quad (7)$$

Il existe des solutions uniquement si $E \geq \sqrt{\frac{L^2k}{m}}$. Les solutions s'écrivent (donner le point si la solution est donnée pour r_e ou pour r_e^2) :

$$r_e^2 = \frac{1}{k} \left(E \pm \sqrt{E^2 - \frac{L^2k}{m}} \right) \quad \text{1 point}_J \quad (8)$$

et la condition s'écrit

$$\frac{E}{k} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2k}{E^2m}} \right) \leq R^2 \quad \text{1 point}_K \quad (9)$$

ce qui peut se ré-exprimer sous la forme :

$$E \leq \frac{1}{2}kR^2 + \frac{L^2}{2mR^2} \quad (10)$$

On peut également faire un raisonnement graphique simple : l'énergie mécanique est conservée 1 point_G, et la fonction du potentiel effectif $V_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$ est croissante 1 point_H pour r suffisamment grand, donc dans ce cas $r \leq R$ implique $V_e(r) \leq V_e(R)$ et donc $E \leq V_e(R)$ 1 point_K. Par ailleurs, l'énergie doit être supérieure au minimum de la fonction $V_e(r)$. Le minimum est obtenu en R_m par

$$\frac{dV_e}{dr}(R_m) = kR_m - \frac{L^2}{mR_m^3} = 0 \quad (11)$$

$$R_m^2 = \sqrt{\frac{L^2}{mk}} \quad (12)$$

et donc

$$E \geq V_e(R_m) \quad (13)$$

$$E \geq \sqrt{\frac{L^2k}{m}} \quad (14)$$

Donner le point s'il est clairement indiqué que la fonction a un minimum (p.ex. un graphique)

L'élongation maximale est atteinte pour la plus grande des solutions de l'équation $E = V_e(r_e)$, équivalente à l'équation (5) 1 point_I, et la solution est l'équation (8) 1 point_J.