Corrigé du Minitest 4

Choc mou dans l'espace – (13 points)

a) Le système formé des trois points matériels est isolé $\boxed{\text{1 point}}_{\text{A}}$, c'est-à-dire qu'il ne subit pas de force extérieure. Le théorème du centre de masse implique donc la conservation de la quantité de mouvement totale $\vec{p} = M\vec{v}_G$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{B}}$, où $M = m_1 + m_2 + m_3$ est la masse totale du système. Le vecteur $\vec{v}_G$ est donc constant, c'est-à-dire que le centre de masse G a un mouvement rectiligne uniforme.

Comme il n'y a pas de (moment de) force extérieure, le théorème du moment cinétique implique la conservation du moment cinétique total $\boxed{\text{1 point}}_{\text{C}}$ par rapport à n'importe quel point fixe ou par rapport au centre de masse G. Après le choc le solide tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan défini par $\vec{v}_0$ et la direction initiale de la tige. Ce plan est un plan de symétrie du solide, donc l'axe de rotation est un axe principal d'inertie. On peut ainsi écrire le moment cinétique total par rapport à G comme

$$\vec{L}_G = I_G\vec{\omega}\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} \tag{1}$$

où I_G est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par G et perpendiculaire à la tige. Comme $\vec{L}_G$ et I_G sont constants, le vecteur $\vec{\omega}$ est constant.

b) Soient P_1, P_2 et P_3 les points occupés par les masses m_1, m_2 et m_3 et repérés par les vecteurs positions $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_3$ par rapport à un point fixe O arbitraire du référentiel. La position $\vec{r}_G$ du centre de masse est définie par

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M} \tag{2}$$

Après le choc mou, on a $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$. Ainsi

$$\overrightarrow{P_2G} = \overrightarrow{P_1G} = \vec{r}_G - \vec{r}_1 = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3}{M} - \vec{r}_1 = \frac{m_3}{M}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \frac{m_3}{M}\overrightarrow{P_1P_3} \tag{3}$$

si bien que le point G se trouve sur la tige à une distance

$$\overline{P_2G} = \overline{P_1G} = \frac{m_3}{M}\overline{P_1P_3} = \frac{m_3}{M}d \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{E}} \tag{4}$$

du point $P_1 = P_2$ et à une distance

$$\overline{P_3G} = d - \overline{P_1G} = \left(1 - \frac{m_3}{M}\right)d = \frac{m_1+m_2}{M}d \tag{5}$$

du point P_3. Le moment d'inertie de I_G du solide autour d'un axe passant par G et perpendiculaire à la tige vaut

$$I_G = m_1\overline{P_1G}^2 + m_2\overline{P_2G}^2 + m_3\overline{P_3G}^2 = (m_1+m_2)\left(\frac{m_3}{M}d\right)^2 + m_3\left(\frac{m_1+m_2}{M}d\right)^2 \tag{6}$$

$$= \frac{(m_1+m_2)m_3}{M}d^2\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{7}$$

La vitesse du centre de masse, qui est constante, se calcule avant le choc en dérivant l'équation (2) par rapport à t et en tenant compte du fait que seul m_1 a une vitesse $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\,\vec{v}_0\,. \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}} \tag{8}$$

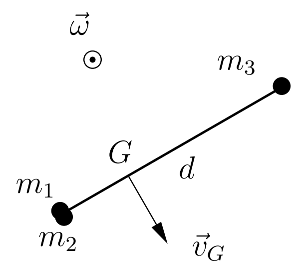
Le moment cinétique total par rapport à G, qui est une constante, se calcule aussi avant le choc, quand seule la masse m_1 a une quantité de mouvement :

$$\vec{L}_G = \overrightarrow{GP_1} \wedge m_1\,\vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad L_G = \frac{m_1 m_3}{M}\,dv_0\,. \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}} \tag{9}$$

La vitesse angulaire de rotation après le choc vaut donc

$$\omega = \frac{L_G}{I_G} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{v_0}{d}\,. \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}} \tag{10}$$

Les vecteurs $\vec{v}_G$ et $\vec{\omega}$ son représentés sur la figure ci-contre, juste après le choc. La direction du vecteur $\vec{v}_G$ est celle du vecteur $\vec{v}_0$, donc $\vec{v}_G$ est perpendiculaire à la tige juste après le choc. $\boxed{\text{1 point pour } \vec{v}_G \text{ correct sur le dessin}}_{\mathrm{J}}$ La direction du vecteur $\vec{\omega}$ est celle de $\vec{L}_G$, c'est-à-dire celle du produit vectoriel $\overrightarrow{GP_1} \wedge \vec{v}_G$. $\boxed{\text{1 point pour } \vec{\omega} \text{ correct sur le dessin}}_{\mathrm{K}}$



c) Le théorème de l'énergie cinétique $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{L}}$ implique

$$\Delta E = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}\,, \tag{11}$$

où ΔE est la variation d'énergie cinétique du système, W_{ext} la somme des travaux des forces que l'extérieur applique sur le système et W_{int} la somme des travaux des forces internes au système. Comme le système est isolé ($W_{\text{ext}} = 0$) et que le choc est mou ($\Delta E < 0$) on a

$$W_{\text{int}} = \Delta E < 0\,. \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{M}} \tag{12}$$

Note : on peut calculer explicitement

$$\Delta E = E_{\text{final}} - E_{\text{initial}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \ldots = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_0^2\,, \tag{13}$$

ou utiliser l'instant de la collision pour écrire la vitesse v_{12} du système des points 1 et 2 juste après la collision en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, $m_1v_0 = (m_1+m_2)v_{12}$, pour déterminer que

$$\Delta E = E_{\text{final}} - E_{\text{initial}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{12}^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \ldots = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_0^2\,. \tag{14}$$