Corrigé du Minitest 4

Bobine et fil – (10 points)

On choisit un repère $Oxyz$ droit, d'origine O au point de contact A de la bobine avec le sol, d'axe $\hat{z}$ vertical dirigé vers le haut, et d'axe $\hat{x}$ horizontal et dirigé dans le sens de la projection horizontale de la force $\vec{F}$.

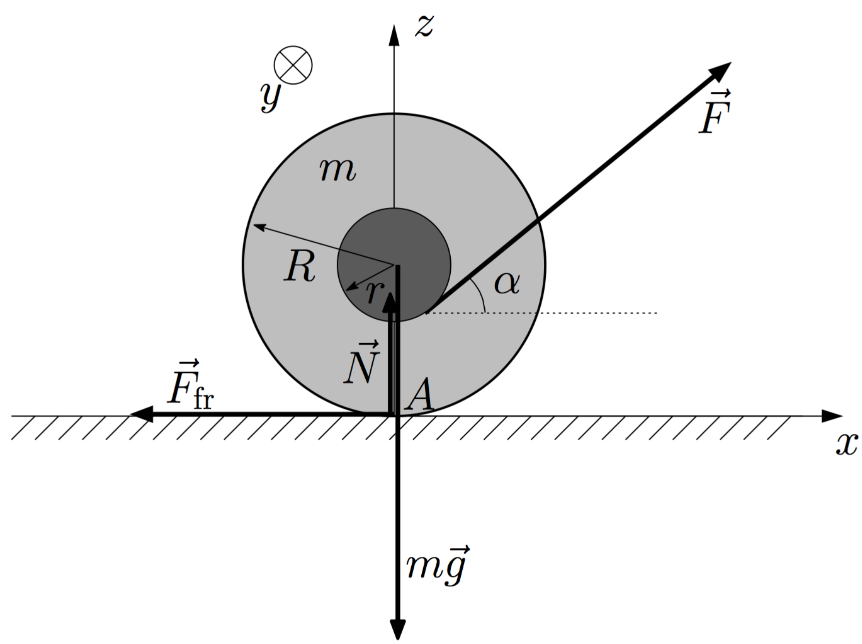
a) (2 points au total)

Le forces qui s'appliquent sur la bobine sont :

- le poids $m\vec{g}$ de la bobine, appliquée en son centre de masse.
- la force de soutient $\vec{N}$ de la bobine, dirigée vers le haut, et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- la force de frottement statique $\vec{F}_{\text{fr}}$ de la bobine avec le sol, parallèle à $\hat{x}$, et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- La force $\vec{F}$ du fil sur la bobine, formant un angle α avec l'axe Ox, et appliquée tangentiellement au cylindre de rayon r en un point de coordonnées $r \sin\alpha$ (horizontale) et $-r\cos\alpha$ (verticale) relativement au centre de la bobine.

$\boxed{\text{1 point pour les 4 forces (enlever } 1/2 \text{ point pour chaque force manquante)}}_{\text{A}}$

$\boxed{\text{1 point pour les 4 points d'application } (-1/2 \text{ point par erreur)}}_{\text{B}}$



b) (7 points au total)

Les équations du mouvement sont données par les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique.

En projection sur les axes Ox et Oz, le théorème du centre de masse donne :

$$F\cos\alpha + F_{\text{fr},x} = m\ddot{x} \,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{C}} \tag{1}$$

$$N - mg + F\sin\alpha = 0 \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha > 0\,. \tag{2}$$

On applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse le la bobine. Les moments sont tous parallèles à $\hat{y}$, et on écrit la projection selon cet axe :

$$-Fr - F_{\text{fr},x}R = I\dot{\omega}\,. \tag{3}$$

$\boxed{\text{1 point pour l'application du théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse}}_{\text{E}}$

$\boxed{\text{1 point pour le calcul des moments}}_{\text{F}}$

$\boxed{\text{1 point pour } L = I\omega}_{\text{G}}$

Puisque le roulement est sans glissement, on a la relation $\ddot{x} = R\dot{\omega}$. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{H}}$

On peut alors récrire l'équation (1) comme

$$F\cos\alpha + F_{\text{fr},x} = mR\dot{\omega}\,, \tag{4}$$

que l'on combine avec l'équation (3) pour éliminer $F_{\text{fr},x}$ et trouver l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mR^2}\,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{5}$$

Solution alternative :

On peut écrire les moments par rapport au point de contact A de la bobine avec le sol. Dans ce cas, le seul moment non nul est celui appliqué par la force $\vec{F}$:

$$\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ 0 \\ R - r\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F\cos\alpha \\ 0 \\ F\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ RF\cos\alpha - rF \\ 0 \end{pmatrix} = I_A\dot{\vec{\omega}}\,. \tag{6}$$

$\boxed{\text{1 point pour l'application du théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe } (A)}_{\text{E}}$

$\boxed{\text{1 point pour le calcul des moments}}_{\text{F}}$

$\boxed{\text{1 point pour } L = I\omega}_{\text{G}}$

En utilisant le théorème de Steiner, on trouve

$$I_A = I + mR^2\,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{H}} \tag{7}$$

La composante selon $\hat{y}$ de l'équation (6) devient

$$RF\cos\alpha - rF = (I + mR^2)\dot{\omega}\,, \tag{8}$$

d'où l'on trouve l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mR^2}\,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{9}$$

c) (1 points au total)

Le système est à l'équilibre statique si $\dot{\omega} = 0$. Ceci est réalisé si

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}\,, \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} \tag{10}$$

ce qui correspond à la situation dans laquelle la force $\vec{F}$ n'applique aucun moment par rapport au point de contact de la bobine avec le sol.