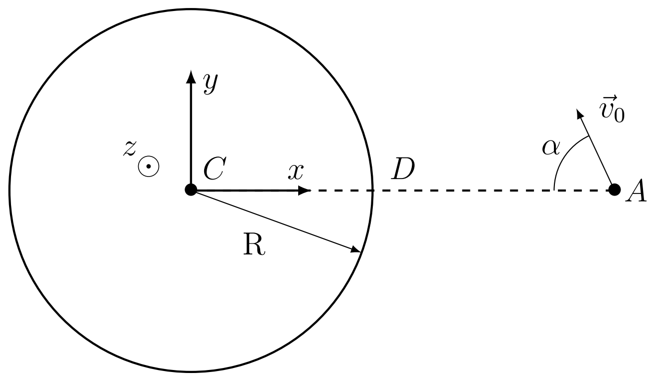
Corrigé du Minitest 2

Astéroïde (17 points)



a) (6 points au total)

Les quantités conservées sont : l'énergie totale, parce que la force gravitationelle est conservative $\boxed{\text{1 point}}_{\text{A}}$, et le moment cinétique, parce que la force est centrale $\boxed{\text{1 point}}_{\text{B}}$.

L'énergie et le moment cinétique peuvent être écrits en cordonnées polaires dans le plan (x, y) :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r} \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{C}} \tag{1}$$

$$\vec{L}_c = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} \tag{2}$$

Avec les conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{D} \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{E}} \tag{3}$$

$$L_c = mDv_0 \sin\alpha \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{4}$$

b) (3 points au total)

La conservation du moment cinétique permet d'exprimer la vitesse angulaire en fonction du moment cinétique : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_c^2}{m^2r^4}$.

Par conséquent, l'énergie mécanique s'écrit comme la somme d'une énergie cinétique *radiale* et d'une énergie potentielle effective qui dépend de r seulement et contient l'autre partie de l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{5}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_c^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \tag{6}$$

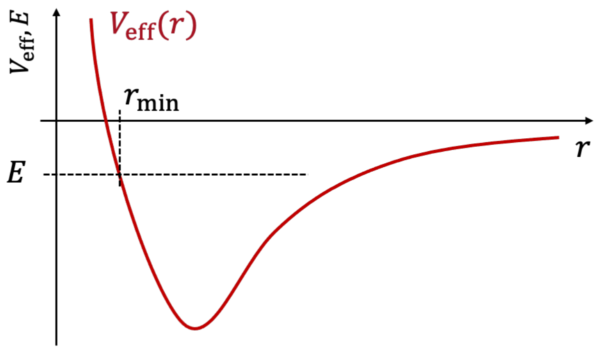
$$\tag{7}$$

$\boxed{\text{1 point (0.5 pour la substitution de } \dot{\theta} \text{ dans } E\text{ ; 0.5 pour l'expression de E en fonction de } r \text{ uniquement)}}_{\text{G}}$.

Le rayon minimum (mais aussi maximum, dans le cas d'une orbite liée) vérifie $\dot{r} = 0$ ce qui implique $E = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$, on obtient donc pour r_{min} l'équation

$$\frac{L_c^2}{2mr_{\text{min}}^2} - \frac{GmM}{r_{\text{min}}} = E \; \boxed{\text{1 point ou pour une équation équivalente}}_{\text{H}}$$

$\boxed{\text{1 point (0.5 pour allure correcte de } V_{\text{eff}} \text{ ; 0.5 pour } r_{\text{min}} \text{ comme intersection entre } V_{\text{eff}} \text{ et } E)}_{\text{I}}$.



c) (4 points au total)

Si $E = 0$ (cas d'une orbite parabolique), cette équation donne directement $r_{\text{min}} = \frac{L_c^2}{2GMm^2}$.

$\boxed{\text{1 point pour avoir bien traité le cas } E = 0}_{\text{J}}$

Si $E \neq 0$ on se rapporte à la recherche des racines d'un polynôme du second degré :

$$r_{\text{min}}^2 + \frac{GmM}{E} r_{\text{min}} - \frac{L_c^2}{2mE} = 0\,. \tag{8}$$

Les solutions sont :

$$r_{\text{min},\pm} = \frac{1}{2}\left(-\frac{GmM}{E} \pm \sqrt{\Delta}\right) \tag{9}$$

$$\text{où } \Delta = \left(\frac{GmM}{E}\right)^2 + \frac{2L_c^2}{mE}\,. \tag{10}$$

ainsi

$$r_{\text{min},\pm} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{E}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L_c^2 E}{G^2 m^3 M^2}}\right) \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{11}$$

Seules les solutions positives ont un sens physique dans ce problème puisque $r \geq 0$ en coordonnées polaires. Deux cas se présentent.

- Si $E > 0$, le terme entre parenthèse doit être positif, donc seule la solution $r_{\text{min},+}$ est retenue. Elle est bien positive puisque, $\frac{2L_c^2 E}{G^2 m^3 M^2}$ étant alors positif, il s'en suit que $\sqrt{1 + \frac{2L_c^2 E}{G^2 m^3 M^2}} > 1$.

  $\boxed{\text{1 point pour le bon choix de solution quand } E > 0}_{\text{L}}$

- Au contraire, si $E < 0$, le terme entre parenthèse doit être négatif. Mais dans ce cas les deux solutions sont physiquement pertinentes, puisque $\frac{2L_c^2 E}{G^2 m^3 M^2}$ étant alors négatif, il s'en suit que $\sqrt{1 + \frac{2L_c^2 E}{G^2 m^3 M^2}} < 1$. On voit donc que $r_{\text{min},-} > r_{\text{min},+} > 0$, c'est à dire que $r_{\text{min},-} = r_{\text{max}}$ correspond à l'apogée de la trajectoire et $r_{\text{min},+}$ au périgée recherché. $\boxed{\text{1 point pour le bon choix quand } E < 0}_{\text{M}}$

d) (4 points au total)

A une distance infinie ($r \to \infty$), l'énergie potentielle est nulle $\boxed{\text{1 point}}_{\text{N}}$, et l'énergie mécanique vaut

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \,. \tag{12}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on a la condition

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{D} \geq 0 \,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{O}} \tag{13}$$

Cette inégalité est satisfaite si

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{D}} \,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{P}} \tag{14}$$

Cette condition est suffisante, et il n'y a pas d'autre condition sur la direction du vecteur $\vec{v}_0$, ni sur l'angle α. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{Q}}$