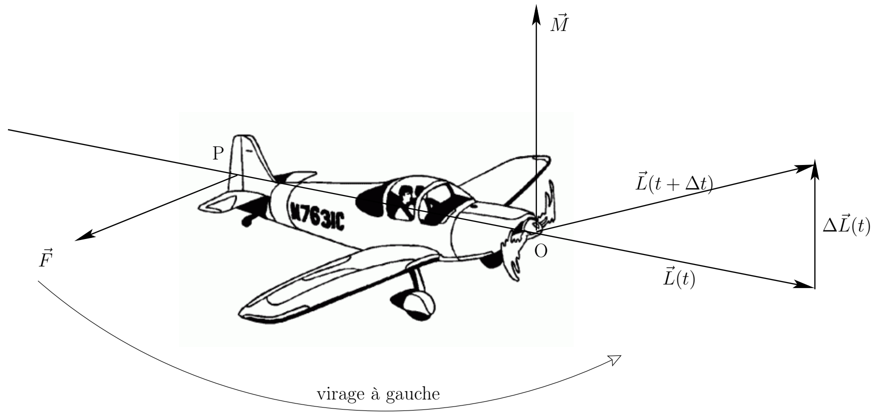
Corrigé Préparatoire 14 : solides en rotation

1. **Lacet en avion**

   En vol horizontal, l'hélice a un moment cinétique $\vec{L}$ dirigé dans le sens du mouvement de l'avion (voir figure). Pour tourner à gauche, le pilote imprime à l'avion un mouvement de rotation. En manœuvrant la dérive, il applique une force $\vec{F}$ et celle-ci impose sur l'hélice un moment $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$, orienté vers le haut. D'après le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, on détermine $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$. Ceci implique que la variation du moment cinétique $\Delta\vec{L}$ est colinéaire au moment exercé, et s'oriente vers le haut dans ce cas. Ainsi, si le pilote ne compense pas, l'avion aura tendance à monter lors d'un virage à gauche.



2. **Toupie**

   Lorsque la toupie est penchée, elle roule sur le sol. Les frottements au point de contact O induisent une force $\vec{F}_c$ qui s'oppose au mouvement de rotation (ralentissement de la rotation par dissipation d'énergie). La force $\vec{F}_c$ est donc dans le plan du sol, colinéaire au mouvement de translation de la toupie.

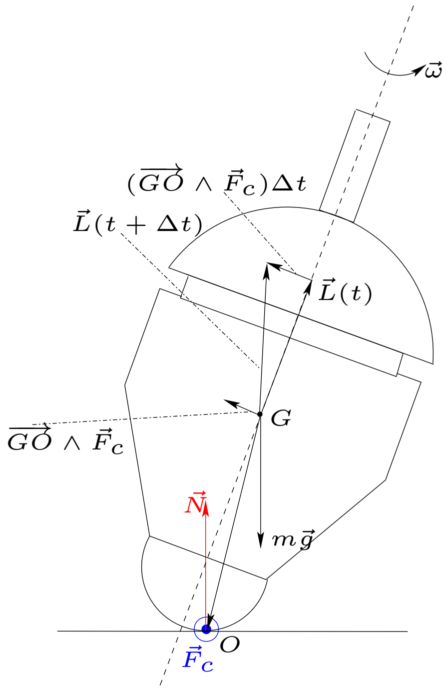
   L'évolution du moment cinétique ($\vec{L} = I\vec{\omega}$) est donnée par le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_c + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{N} \ . \tag{1}$$

   Le moment exercé par la pesanteur en G est nul car $\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

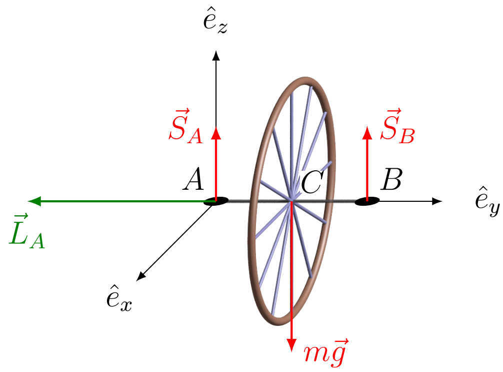
   — On observe que la variation du moment cinétique a une composante due au moment de la force de soutien $\vec{N}$. Ce moment est parallèle à $\vec{F}_c$ et est responsable de la précession de la toupie : l'axe de rotation de la toupie va tourner autour de la direction de la force $\vec{N}$.

   — Une autre composante de la variation du moment cinétique est colinéaire au moment exercé par la force de frottement $\vec{F}_c$, et qui tend à aligner $\vec{L}$ avec la verticale : la toupie se redresse (voir figure). En position verticale, la toupie n'a plus de mouvement de translation (le centre de masse est devenu immobile). Les frottements n'exercent plus aucun moment en dehors de l'axe : l'orientation de $\vec{L}$ ne varie plus : la position est stable.



3. **Roue soutenue par l'une des extrémités de son axe**

Initialement, l'objet formé de la roue et de son axe, de masse m, subit son poids et le soutien en A et B. La roue est à l'équilibre : la somme des forces et la somme des moments de force, en particulier par rapport à A, sont nulles.

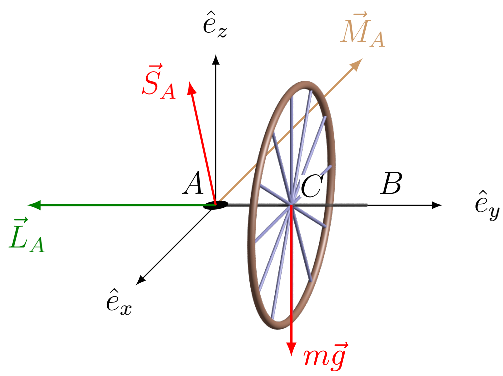


$$\vec{F} = \vec{S}_A + \vec{S}_B + m\vec{g} = \vec{0},$$

$$\vec{M}_A = \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} \wedge \vec{S}_A + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_B + \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} = \vec{0}.$$

En absence de soutien en B, l'équilibre est rompu :

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} \neq \vec{0}.$$

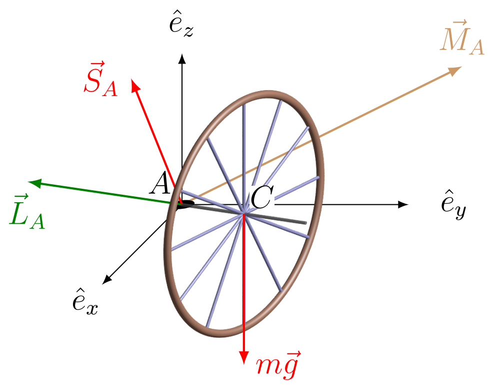


Le moment du poids par rapport à A est horizontal, car normal au plan vertical défini par A, C et $m\vec{g}$. Selon le théorème du moment cinétique

$$\vec{M}_A = \dot{\vec{L}}_A,$$

le moment cinétique $\vec{L}_A$ est modifié horizontalement et reste donc à tout instant horizontal.

L'axe de la roue pivote autour de l'axe vertical passant par A : c'est un mouvement de précession. A cela vient s'ajouter une inclinaison de l'axe de la roue par rapport à l'horizontale, inclinaison qui dépend de la vitesse angulaire de rotation de la roue : plus la vitesse de rotation de la roue est grande, plus l'inclinaison est faible. A ce mouvement se superpose enfin une oscillation de cette inclinaison, appelée nutation.
Lien : https://youtu.be/GEKtnlZfksI



4. **Freinage d'un cylindre en rotation**

On exploite le théorème du moment cinétique et on résout l'équation différentielle obtenue en devinant la forme de la solution.

(a) Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation fixe s'écrit, selon $\hat{e}_z$ choisi pointant dans le plan de la feuille,

$$M_O = -RF = -kR\omega = \dot{L}_O = I_O\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}\,.$$

On obtient alors l'équation différentielle

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\,\omega(t)\,.$$

(b) On devine que cette équation différentielle a pour solution une fonction $\omega(t)$ de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,

$$\omega(t) = Ae^{Bt}\,,$$

où A et B sont des constantes.
L'accélération angulaire s'écrit alors

$$\dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t)\,,$$

si bien que

$$A = \omega(0) = \omega_0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{2k}{mR}\,.$$

La vitesse angulaire a ainsi finalement pour expression

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{2k}{mR}t}\,.$$