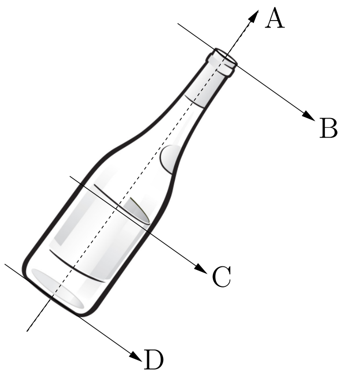
Corrigé Préparatoire 13 : Moments d'inertie ; Statique

1. **Moments d'inertie d'une bouteille**

   Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ fixe dépend du carré des distances d_α^2 à l'axe de chacun des éléments de masse m_α selon la relation $I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$. Dans le cas de la bouteille, c'est par rapport à l'axe A que les carrés des distances sont en moyenne les plus petites, donc $I_1 = I_\mathrm{A}$. Par un même raisonnement basé sur la géométrie de la bouteille, on trouve que $I_2 = I_\mathrm{C}$, $I_3 = I_\mathrm{D}$, et $I_4 = I_\mathrm{B}$.



2. **Accélération angulaire**

   Selon le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\vec{M}_\mathrm{axe} = I_\mathrm{axe}\,\dot{\vec{\omega}}_\mathrm{axe}\,,$$

   pour un moment de force donné, plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est petite.

   Par définition,

$$I_\mathrm{axe} = \int_\mathrm{corps} r_{\perp\mathrm{axe}}^2\,dm\,.$$

   Plus un élément de masse dm est éloigné de l'axe, plus sa contribution au moment d'inertie est importante. Par conséquent,

$$I_B < I_C < I_A\,.$$

   Remarque : $I_B = \frac{1}{2}mR^2$ et $I_A = mR^2$.

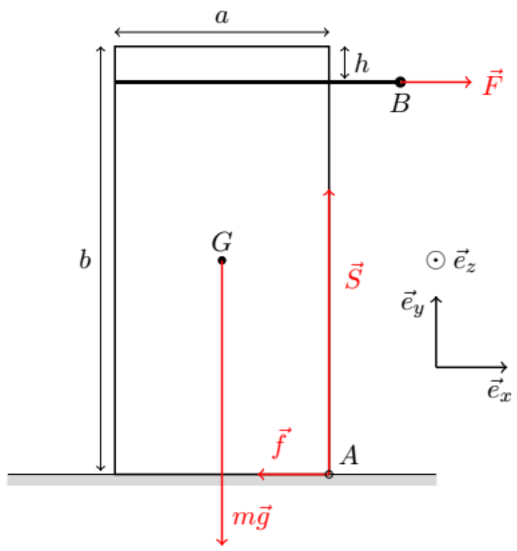
3. **Théorème du moment cinétique : équilibre**

   Le système considéré est le bloc (supposé homogène). Ce dernier subit quatre forces : son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{F}$ exercée par la corde, ainsi que la force de soutien $\vec{S}$ (liaison) et la force de frottement statique $\vec{f}$ exercées par le sol. A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles (par rapport à tout point fixe O). La loi de Newton,

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = \vec{0}\,,$$

   est insuffisante pour trouver les forces inconnues ($\vec{S}$ et $\vec{f}$). Il est donc nécessaire d'utiliser le fait que la somme des moments est nulle. Le poids s'applique au centre de masse G et la force $\vec{F}$ en B. Lorsque le bloc de pierre pivote autour de A, le soutien $\vec{S}$ et le frottement $\vec{f}$ s'appliquent en A. En calculant les moments de force par rapport à A, ceux de $\vec{S}$ et $\vec{f}$ sont nuls, et on trouve :

$$\begin{aligned}
\vec{M}_A &= \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{f}) \\
&= \overrightarrow{AB}\wedge\vec{F} + \overrightarrow{AG}\wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{AA}\wedge\vec{S}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AA}\wedge\vec{f}}_{\vec{0}} \\
&= \vec{0}\,.
\end{aligned}$$



Selon $\vec{e}_z$,

$$-(b-h)F + \frac{a}{2}mg + 0 + 0 = 0\,.$$

Cette dernière relation fournit directement la norme de la tension dans la corde :

$$F = \frac{amg}{2(b-h)} \cong 401.3\,\mathrm{N}\,,$$

où l'on a posé $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$.

Remarque : on est maintenant en mesure de déterminer $\vec{S}$ et $\vec{f}$ en exploitant la loi de Newton (ou en choisissant de calculer les moments par rapport à d'autres points, p.ex. le point sur la corde à la verticale de A).