Corrigé 12 : Cinématique du solide

1. **Saut en moto**
Lorsque le système motard-moto est en l'air, il ne subit que son poids comme force extérieure (on néglige les frottements de l'air). Le moment de ce poids par rapport au centre de masse est nul, donc le moment cinétique total du sytème par rapport au centre de masse est constant.
   (a) Si le motard freine la roue arrière, il diminue le moment cinétique de la roue, donc la conservation du moment cinétique total implique une mise en rotation de l'ensemble du système dans le même sens que la roue arrière, donc la moto pique du nez.
   (b) S'il freine avec la roue avant, il va se passer exactement la même chose.
   (c) Seule la roue arrière est motorisée. En ré-accélérant la roue arrière, le motard pourra arrêter la rotation de la moto (s'il redonne à la roue arrière sa vitesse de rotation initiale). Ainsi en freinant la roue arrière ou en donnant des gaz, le motard pourra garder sa vitesse de rotation sous contrôle pendant le saut.

2. **Moment de force : bras de levier**
   (a) On exploite la définition du moment de force par rapport à A :
$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F} \, .$$
Selon $\hat{e}_z$, la norme du moment de force s'écrit
$$M_A = RF\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = RF\cos\alpha \, ,$$
où $F = ||\vec{F}||$.
      - Pour $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, la rotation induite est de sens trigonométrique et le moment $\vec{M}_A$ est **sortant** :
$$\odot \, \vec{M}_A \, .$$
      - Pour $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, la rotation induite est dans le sens des aiguilles d'une montre et le moment $\vec{M}_A$ est **entrant** :
$$\otimes \, \vec{M}_A \, .$$

   (b) Par le théorème du moment cinétique, l'accélération angulaire est proportionnelle au moment de force de $\vec{F}$ par rapport à A,
$$\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A \, .$$
Selon $\hat{e}_z$, $\dot{L}_A = M_A = RF\cos\alpha$.
Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est maximale lorsque le bras de levier est maximal. C'est le cas
$$\text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi$$
(la force $\vec{F}$ est alors tangente à la roue).

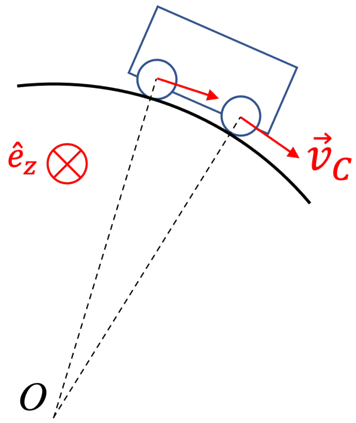
(c) Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est minimale pour

$$\text{pour} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

(la force $\vec{F}$ est alors normale à la roue).

3. **Chariot se déplaçant sur un cylindre**

(a) Pour déterminer l'axe de rotation instantané, il suffit de connaitre les vecteurs vitesse de deux points du châssis. Ici, les points du châssis situés sur les axes des deux roues ont chacun un vecteur vitesse correspondant à une rotation autour du point O, comme illustrée sur la figure ci-dessous



Par conséquent, puisque le châssis est un solide indéformable, son centre de rotation instantané se situe en O. Enfin, en utilisant que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est liée à la vitesse du point G par $v_G = (R+h)\,\dot{\theta}$, on déduit que le vecteur vitesse de rotation instantanée du châssis s'exprime comme $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z = \frac{v_G}{R+h}\vec{e}_z$, où $\vec{e}_z$ pointe dans la page, comme indiqué sur la figure.

(b) Chaque roue tourne instantanément autour de son point de contact avec le sol, comme vu en cours. Le vecteur vitesse de rotation instantané pointe aussi dans la page selon $+\vec{e}_z$.

(c) Le centre d'une roue C, pris comme un point du châssis, se déplace avec une vitesse de norme

$$v_C = (R+r)\,\Omega = \frac{R+r}{R+h} v_G$$

D'autre part, la vitesse du même point C, pris comme point de la roue, peut aussi s'exprimer

$$v_C = r\,\omega$$

(Nous avons utilisé le fait que $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ pointent dans le même sens, et donc que tous les termes ci-dessus sont positifs.)
Il reste donc à égaliser ces deux expressions pour trouver

$$\omega = \frac{R+r}{r(R+h)} v_G = \frac{1+R/r}{h+R} v_G$$

Dans le cas limite où $r \ll R$ on remarque que $\omega \longrightarrow \infty$ pour toute vitesse v_G non nulle, quelque soit $h > 0$.