Corrigé Préparatoire 11 : systèmes de points matériels, collisions

1. **Questions conceptuelles**

   (a) Au moment du passage au-dessus de la barre, la position du corps de l'athlète est telle que son centre de masse peut être en dehors du volume de son corps (notamment si le corps est courbé comme un demi-cercle). Il est donc possible que son centre de masse soit au niveau ou même en dessous de la barre. On remarquera que si la barre est remplacée par un mur, alors le centre de masse pourrait passer "à travers" le mur.

   Durant le saut, et en négligeant les frottements de l'air, le poids est la seule force extérieure. La trajectoire du centre de masse suit un mouvement balistique, qui est donc une parabole. Les videos suivantes illustrent la situation :

   `https://www.youtube.com/watch?v=XBtBdNHBNSI`

   `https://www.youtube.com/watch?v=RaGUW1dOw8g`

   (b) Non, la quantité de mouvement de la balle n'est pas conservée car le sol applique une force extérieure au système de la balle. On note que les quantités de mouvement avant et après le choc, bien qu'ayant des normes égales, ne sont pas des vecteurs égaux. C'est seulement si on considère le système balle+Terre que la quantité de mouvement totale est conservée : lorsque la balle change de direction, la Terre subit donc un effet de recul (imperceptible à cause de sa grande masse), de sorte que le centre de masse du système balle+Terre est immobile (si on néglige toute autre force externe durant la collision).

   (c) Dans les deux cas (sol ou matelas), l'œuf subit la même variation de quantité de mouvement Δp durant le choc (en fait $\Delta p = m\sqrt{2gh}$ où m est la masse de l'œuf et h la hauteur de chute). Cette variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force $F(t)$ appliquée par le sol ou le matelas durant un temps Δt. Par la deuxième loi de Newton, l'impulsion est égale à

   $$\Delta p = \int_0^{\Delta t} F(t)dt,$$

   où on a mis $t = 0$ à l'instant où la force commence à agir.

   En supposant que la force F est constante durant le choc, c'est-à-dire $F(t) = F_0$, on a $\Delta p = F_0 \Delta t$ et la force est inversement proportionnelle à la durée du choc ($F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t}$). Comme la durée du choc sur le matelas est beaucoup plus longue que sur le sol, la force moyenne y est plus faible, et donc l'œuf se cassera moins facilement sur le matelas.

2. **Firmin le peintre**

   Le système formé de la nacelle et de Firmin étant à l'équilibre statique, la somme des forces et la somme des moments des forces (par rapport à n'importe quel point du référentiel) doivent toutes deux être nulles. Dans les trois situations décrites dans l'énoncé, toutes les forces qui s'appliquent sur le système sont verticales : il s'agit du poids de la nacelle $m\vec{g}$ et du poids de Firmin $M\vec{g}$, dirigés vers le bas, et des deux forces de soutien des câbles $\vec{F}_{\text{gauche}}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$, dirigées vers le haut et mesurées par les dynamomètres. Comme on doit avoir $M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gauche}} + \vec{F}_{\text{droite}} = 0$, la force du dynamomètre de droite vaut toujours $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}}$.

   Lorsque Firmin est situé au centre de la nacelle, les forces exercées par les câbles sont égales par symétrie. Le dynanomètre du côté droit doit alors indiquer, comme à gauche, $F_{\text{droite}} =$

$F_{\text{gauche}} = 600$ N. On peut également s'en convaincre en posant que la somme des moments des forces par rapport à un point au milieu de la nacelle vaut zéro. A ce stade on sait alors que la somme des poids vaut $Mg + mg = F_{\text{gauche}} + F_{\text{droite}} = 600 + 600 = 1200$ N.

Lorsque le dynamomètre de gauche indique 400 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 400 = 800$ N.

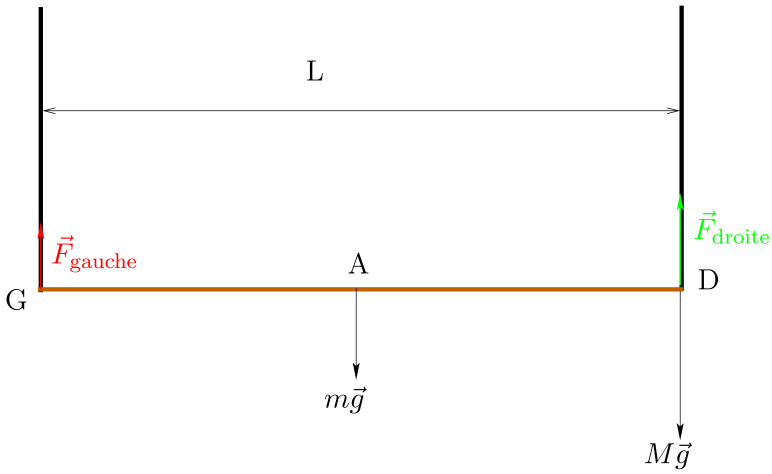
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 200 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 200 = 1000$ N.

Posons maintenant que la somme des moments des forces par rapport au point d'attache du câble de droite sur la nacelle est nulle (voir figure) :

$$\Sigma\vec{M}_D = \vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge \vec{F}_{\text{droite}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge M\vec{g}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA} \wedge m\vec{g}}_{mgL/2} + \underbrace{\overrightarrow{DG} \wedge \vec{F}_{\text{gauche}}}_{-F_{\text{gauche}}L},$$

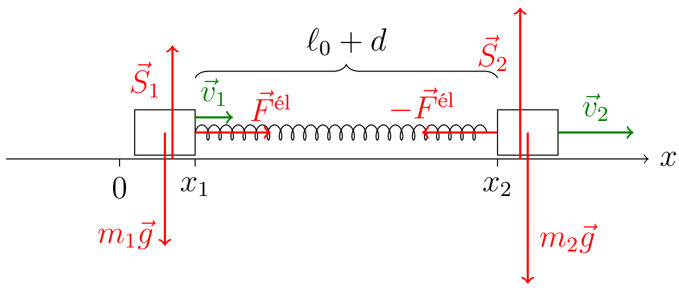
étant donné que les forces $M\vec{g}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$ n'ont pas de moment par rapport à ce point. On a donc $mg = 2F_{\text{gauche}}$.

Finalement, le poids de l'échafaudage vaut ainsi $mg = 400$ N et celui de Firmin $Mg = 1200 - 400 = 800$ N.



3. **Problème à deux corps**

   (a) Chacun des chariots subit son poids, le soutien du sol et la force élastique du ressort :



   i. Le système formé des deux chariots subit le poids et le soutien du sol (les forces élastiques sont internes et se compensent). Les forces sont toutes verticales et s'annulent, étant donné qu'il n'y a aucun mouvement vertical. Le centre de masse a donc un mouvement horizontal, rectiligne et uniforme.

   ii. A cause du ressort, la distance entre les chariots oscille.

   iii. Le mouvement de chaque chariot est alors une superposition (addition) d'un mouvement rectiligne uniforme et d'une oscillation.

(b) Comme il n'y a pas de mouvement vertical, écrivons les équations du mouvement selon $\hat{e}_x$ uniquement.

La distance entre les chariots et la déformation d du ressort sont liées par

$$x_2 - x_1 = \ell_0 + d\,.$$

Si $d > 0$, le ressort est en élongation : le chariot 1 accélère vers la droite et le chariot 2 vers la gauche. Selon $\hat{e}_x$, l'accélération du chariot 1 est positive et celle du chariot 2 négative. Si $d < 0$, le ressort est en compression. Selon $\hat{e}_x$, l'accélération du chariot 1 est alors négative et celle du chariot 2 positive.

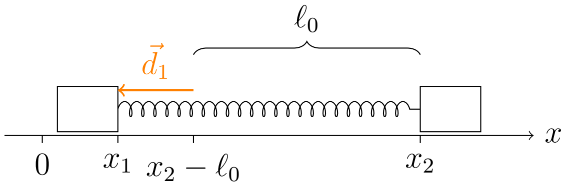
On peut alors écrire les équations du mouvement et vérifier qu'on retrouve la force attendue :

i. Chariot 1 :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - (x_2 - \ell_0)) \qquad x_1(0) = 0 \quad \dot{x}_1 = 0\,.$$

où le vecteur allongement $\vec{d}_1$ est donné par

$$\vec{d}_1 = \big(x_1 - (x_2 - \ell_0)\big)\hat{e}_x$$

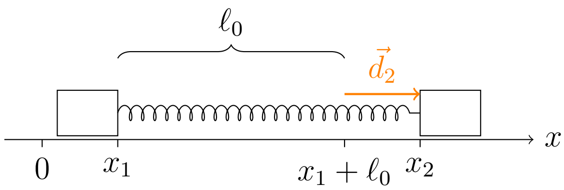


Chariot 2 :

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - (x_1 + \ell_0)) \qquad x_2(0) = \ell_0 \quad \dot{x}_2 = v_0\,.$$

où le vecteur allongement $\vec{d}_2$ est donné par

$$\vec{d}_2 = \big(x_2 - (x_1 + \ell_0)\big)\hat{e}_x$$



Ainsi, selon $\hat{e}_x$,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -kd_1 = -k\big(x_1 - (x_2 - \ell_0)\big) = +k(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -kd_2 = -k\big(x_2 - (x_1 + \ell_0)\big) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\,. \end{aligned}$$

ii. Centre de masse donné par $mx_G = m_1x_1 + m_2x_2$ où $m = m_1 + m_2$:

$$m\ddot{x}_G = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \qquad x_G(0) = \frac{m_2}{m}\ell_0 \quad \dot{x}_G(0) = \frac{m_2}{m}v_0\,.$$

iii. Coordonnée relative $\delta = x_2 - x_1$:

$$\ddot{\delta} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(\delta - \ell_0) - \frac{k}{m_1}(\delta - \ell_0) = -k\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}(\delta - \ell_0)\,.$$

En posant $\Omega^2 = k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}$,

$$\ddot{\delta} = -\Omega^2(\delta - \ell_0) \qquad \delta(0) = \ell_0 \quad \dot{\delta}(0) = v_0\,.$$

C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique centré sur ℓ_0.

Illustration
On peut résoudre les équations du mouvement pour ces conditions initiales :

$$x_G(t) = \frac{m_2}{m}(v_0 t + \ell_0) \qquad \delta(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\,.$$

On vérifie aisément que les positions des chariots sont données par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_G(t) - \frac{m_2}{m}\delta(t) = \frac{m_2}{m}(v_0 t - \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)) \\ x_2(t) &= x_G(t) + \frac{m_1}{m}\delta(t) = \ell_0 + \frac{m_2}{m}v_0 t + \frac{m_1}{m}\frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\,. \end{aligned}$$