

Solides indéformables

« Parce qu'il est plus facile de construire des pyramides que des sphères. Parce que le vent produit les dunes en forme de pyramides et non de parthénon. »

— Umberto Eco

I. Introduction

Un solide indéformable peut être vu comme un ensemble de points matériels dont les distances relatives restent fixes au cours du temps.

La position d'un solide peut être repérée par six paramètres, par exemple les trois coordonnées d'un point et trois angles qui repèrent les positions de trois vecteurs orthonormés formant un repère lié au solide (par exemple les angles d'Euler, que nous introduirons un peu plus tard).

Or, nous avons vu qu'un système de points matériels satisfait les deux équations

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}.$$

Ce sont des équations vectorielles, donc effectivement six équations, autant que de paramètres pour fixer la position, et donc le problème est bien posé. Où se cache la difficulté ? Dans la traduction de ces équations en équations différentielles pour les variables choisies pour décrire le système.

Pour l'équation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$, c'est simple. Nous avons vu que $\vec{P} = M\vec{v}_G$, où \vec{v}_G est la vitesse du centre de masse, et donc si l'on choisit les coordonnées du centre de masse x_G, y_G, z_G comme trois des variables, elles sont régies par les équations

$$m\ddot{x}_G = F_x^{\text{ext}}, \quad m\ddot{y}_G = F_y^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad m\ddot{z}_G = F_z^{\text{ext}}.$$

C'est le moment cinétique qui pose problème. En effet, alors que \vec{P} est simplement relié à la vitesse d'un point, le moment cinétique n'est pas en général proportionnel à la vitesse de rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Par ailleurs, les forces peuvent s'appliquer à différents points d'un solide, et il peut être avantageux d'utiliser le théorème du moment cinétique en d'autres points que l'origine du repère, ce qui exige une généralisation du théorème $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$.

À ce sujet, notons que le poids d'un solide peut être considéré comme s'appliquant au centre de masse. En effet, si le solide est considéré comme une collection de masses m_i aux points M_i , le moment du poids en O est défini par

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{g} \\ &= \sum_i \overrightarrow{OG} \wedge m_i \vec{g} + \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{g} \\ &= \overrightarrow{OG} \wedge \underbrace{\left(\sum_i m_i \right)}_{=M} \vec{g} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g},\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{g}.}$$

Par ailleurs, le centre de masse pour un solide est en principe défini par une intégrale

$$\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \longrightarrow \quad \vec{r}_G = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r},$$

où $\rho(\vec{r})$ est la densité volumique au point \vec{r} .

En pratique, on s'intéressera à des solides homogènes, et le centre de masse peut se déduire de simples considérations de symétrie (centre pour une sphère, un cube, un cylindre, un parallélépipède, *etc.*).

II. Cinématique

Commençons par nous familiariser avec la description du mouvement d'un solide. Comme vu précédemment, un solide définit un référentiel, et son mouvement est décrit par deux vecteurs :

- la vitesse d'un point, par exemple A ;
- une vitesse de rotation $\vec{\omega}$.

Pour un point M immobile par rapport au solide, $\vec{v}'_M = \vec{0}$, et on a

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}.}$$

C'est la relation fondamentale entre les vitesses de deux points d'un solide, vraie pour toute paire de points.

De même, toujours en supposant que M est immobile, $\vec{v}'_M = \vec{0}$ et $\vec{a}'_M = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}).}$$

Il est commode de distinguer quatre types de mouvement d'un solide suivant les valeurs de \vec{v}_A et $\vec{\omega}$.

1. $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A = \vec{0}$ \implies $\vec{v}_M = \vec{0} \quad \forall M$: le solide est au repos.
2. $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A \neq \vec{0}$ \implies $\vec{v}_M = \vec{v}_A \quad \forall M$: le solide est en translation.
3. $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ \implies $\vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{\omega}}_{=0} = 0 \quad \forall M$:

tous les points ont une vitesse perpendiculaire à $\vec{\omega}$. Le solide est en rotation autour d'un axe parallèle à $\vec{\omega}$.

4. $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0 \implies \vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \quad \forall M$: tous les points ont la même vitesse projetée sur $\vec{\omega}$. Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal (composition d'une rotation d'axe $\vec{\omega}$ et d'une translation parallèle à $\vec{\omega}$).

Proposition (Axe instantané de rotation). Si $\vec{\omega} \neq 0$, il existe une droite et une seule sur laquelle tous les points ont la même vitesse parallèle à $\vec{\omega}$. Cette droite est appelée **axe instantané de rotation**.

Preuve. Cherchons un point C tel que $\vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$, ou encore $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \vec{0}$. Or,

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC})}_{=(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC})\vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{AC}^a} = \vec{0}$$

implique que

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC})\vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Une solution de cette équation est donnée par

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}}.$$

En effet, $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, et $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A - \omega^2 \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

De plus, si D appartient à la droite définie par C et $\vec{\omega}$, on a

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD}}_{=0 \text{ puisque } \overrightarrow{CD} \parallel \vec{\omega}} = \vec{v}_C$$

Enfin, pour un point E qui n'est pas sur la droite, $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CE} \neq 0$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CE} \perp \vec{\omega}$ donc \vec{v}_E n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

La nature du mouvement (rotation simple ou mouvement hélicoïdal) se déduit simplement de cette formule. En effet, si $\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}$, alors

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) \\ &= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \omega^2 \vec{v}_A, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\vec{v}_C = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega}.$$

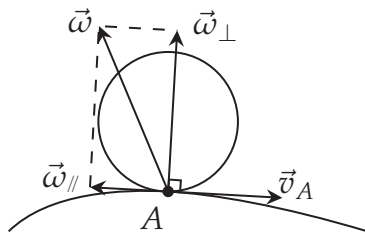
- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$, $\vec{v}_C = \vec{0}$. Les points sur l'axe instantané de rotation ont une vitesse nulle. Le mouvement est donc un mouvement de **rotation**.
- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$, \vec{v}_C est parallèle à $\vec{\omega}$. Les points sur l'axe instantané de rotation sont animés d'un mouvement de translation parallèle à $\vec{\omega}$. C'est donc un mouvement **hélicoïdal**.

Dans tous les cas, l'axe instantané de rotation est l'axe qui passe par C et qui est parallèle à $\vec{\omega}$.

a. La relation $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ se démontre aisément en passant en coordonnées cartésiennes.

1. Solides en contact

Considérons un solide S en contact avec un autre, supposé immobile, et supposons que le contact soit réduit à un point A , et que les plans tangents des deux solides soient confondus en ce point.



$\vec{\omega}_{\parallel}$ et \vec{v}_A sont dans le plan tangent, mais pas nécessairement colinéaires.

Le mouvement du solide S est caractérisé par deux vecteurs, \vec{v}_A (la vitesse du point A de S par rapport à l'autre solide), et le vecteur $\vec{\omega}$.

Comme les solides sont indéformables, \vec{v}_A doit être dans le plan tangent. Par contre, $\vec{\omega}$ peut avoir des composantes parallèles et perpendiculaires au plan tangent :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}.$$

Définitions. \vec{v}_A est appelée vitesse de **glissement**, $\vec{\omega}_{\parallel}$ est appelée vitesse de **roulement**, et $\vec{\omega}_{\perp}$ est appelée vitesse de **pivotement**.

D'après les propriétés générales, on a :

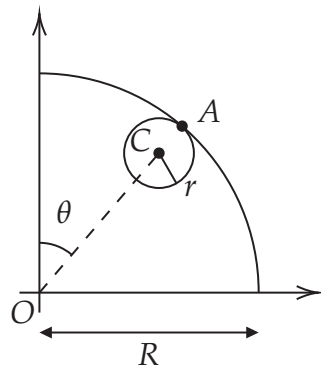
- Si $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ ($\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$), c'est une **rotation**.
- Si $\vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$ ($\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$), le point C défini par $\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} = \vec{0}$ est confondu avec A et A est sur l'axe instantané de rotation.

Cas particulier. Si $\vec{v}_A = \vec{0}$ il n'y a pas de glissement, et le mouvement est un pur mouvement de rotation puisque $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$. On dit qu'il s'agit d'un **roulement sans glissement**.

Résumé.

- $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$: l'axe instantané de rotation passe par A .
- $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$: mouvement de rotation.
- $\vec{v}_A = \vec{0}$: roulement sans glissement, rotation d'axe passant par A .

Exemple. On considère une bille de rayon r qui roule sans glisser à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Que peut-on dire sur $\vec{\omega}$?



- Roulement sans glissement donc $\vec{v}_A = \vec{0}$.
- Pour tout point de la bille,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

— Le centre de la bille a donc pour vitesse

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

avec $\overrightarrow{AC} = -r \vec{e}_r$.

— Posons $\vec{\omega} = \omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + \omega_\phi \vec{e}_\phi$. Alors on a

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} &= -r (\omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + \omega_\phi \vec{e}_\phi) \wedge \vec{e}_r \\ &= -r \omega_\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r - r \omega_\phi \vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_r \\ &= r \omega_\theta \vec{e}_\phi - r \omega_\phi \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

— Or, le centre est à la distance $R - r$ de l'origine. D'après les formules en coordonnées sphériques, on a donc

$$\vec{v} = (R - r) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + (R - r) \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

— En comparant ces deux expressions, on en déduit

$$\begin{cases} r \omega_\theta = (R - r) \dot{\phi} \sin \theta \\ -r \omega_\phi = (R - r) \dot{\theta} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \omega_\theta = \frac{R - r}{r} \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_\phi = -\frac{R - r}{r} \dot{\theta} \end{cases}.$$

La vitesse de pivotement ω_r n'est pas fixée par la condition de roulement sans glissement.

2. Mouvement plan sur plan

On parle de mouvement plan sur plan lorsque, à tout instant, les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe Π du référentiel fixe. De façon équivalente, un tel mouvement est caractérisé par le fait qu'une surface plane Σ du solide reste en permanence dans un plan Π .

Propriétés.

1. $\vec{\omega}$ est normal au plan Π .

En effet, $\vec{v}_M - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ doit être parallèle à Π pour tout vecteur \overrightarrow{AM} , donc perpendiculaire à la normale à Π , ce qui sera le cas si $\vec{\omega} \perp \Pi$.

2. Le mouvement est soit une translation, soit une rotation.

En effet, $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$. Ainsi, soit $\vec{\omega} = \vec{0}$ (translation), soit $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ mais $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$, et c'est une rotation.

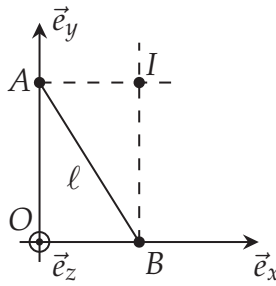
3. Si le mouvement est une rotation, il y a un centre instantané de rotation I dans Σ défini par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}.$$

Il satisfait $\vec{v}_I = \vec{0}$.

Exemples.

1. Considérons une barre qui glisse contre un mur en restant dans un plan vertical. Où est le centre instantané de rotation, et quelle est sa trajectoire pendant la chute?



Comme la barre reste dans un plan vertical, c'est un mouvement plan sur plan, et $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

Le centre instantané de rotation I vérifie

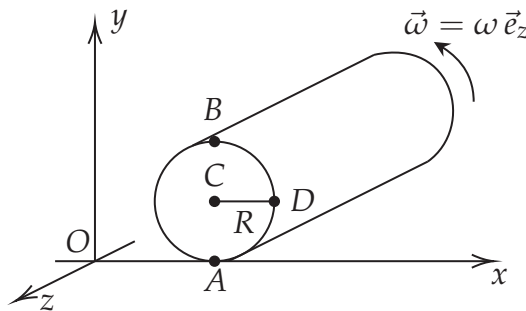
$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \vec{BI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_B}{\omega^2}.$$

On a

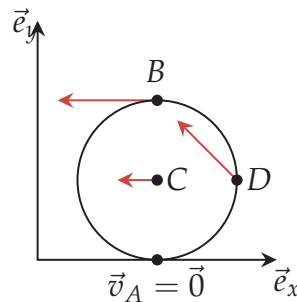
$$\begin{cases} \vec{v}_A \parallel \vec{e}_y & \implies \vec{AI} \parallel \vec{e}_x \\ \vec{v}_B \parallel \vec{e}_x & \implies \vec{BI} \parallel \vec{e}_y \end{cases}.$$

I est donc à l'intersection de la perpendiculaire au mur en A et de la perpendiculaire au sol en B . C'est donc le point qui complète un rectangle avec AOB . On en déduit que $OI = AB = l$. I décrit un quart de cercle de centre O et de rayon l .

2. Considérons un cylindre qui roule sans glisser. Où est le centre instantané de rotation? Que valent les vitesses aux points A, B, C et D ?



Comme il s'agit d'un roulement sans glissement, $\vec{v}_A = \vec{0}$ et A est donc le centre instantané de rotation.

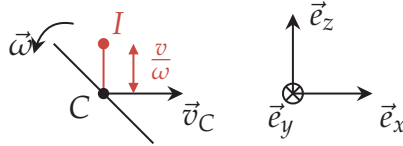


Les autres vitesses sont données par

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{\omega} \wedge \vec{AC} \\ &= \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_y \\ &= -R\omega \vec{e}_x, \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega} \wedge \vec{AB} = 2\vec{v}_C = -2R\omega \vec{e}_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_D &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} \\
&= \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_y + \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_x \\
&= -R\omega \vec{e}_x + R\omega \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

3. Considérons une barre qui tourne autour de son centre C dans un plan xy . Le centre C est animé d'une vitesse v dans la direction x . Où est le centre instantané de rotation ?



D'après la formule générale,

$$\overrightarrow{CI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C}{\omega^2}.$$

Or, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{v}_C = v \vec{e}_x$:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{\omega \vec{e}_y \wedge v \vec{e}_x}{\omega^2} = -\frac{\omega v}{\omega^2} \vec{e}_z,$$

soit finalement

$$\boxed{\overrightarrow{CI} = -\frac{v}{\omega} \vec{e}_z.}$$

III. Théorèmes relatifs au moment cinétique et à l'énergie cinétique

Dans cette section, nous allons établir quelques théorèmes généraux relatifs au moment cinétique en un point quelconque et à sa dérivée.

Pour un point matériel, nous avons vu que $\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}$ satisfait

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge m \vec{v}.$$

Pour un ensemble de points, on définit de même

$$\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i,$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
\vec{L}_A &= \sum_i (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}_i) \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \overrightarrow{AO} \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{=M \vec{v}_G},
\end{aligned}$$

soit

Théorème (Théorème du transfert).

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M \vec{v}_G.$$

Comme nous le verrons, il est souvent utile de considérer le moment cinétique au centre de masse G .

Proposition.

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

où \vec{L}_G^* est le moment cinétique dans le référentiel du centre de masse.

Preuve. On a simplement

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G) \\ &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_G \\ &= \vec{L}_G^* + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{GM}_i \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}_G, \end{aligned}$$

et donc finalement on a bien

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*.$$

Théorème 1 (1^{er} théorème de König). On a

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de $\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge m \vec{v}_G$ appliqué à $O = G$, et de $\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$.

Théorème 2 (2^e théorème de König). On a

$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2,$$

où K désigne l'énergie cinétique.

Preuve. L'énergie cinétique totale est définie par

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2.$$

Dans le référentiel du centre de masse, on a $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$, d'où

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^{*2} + 2 \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G + \vec{v}_G^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^{*2}}_{=K^*} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G}_{\vec{0}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_G^2}_{=M} \\
&= K^* + \frac{1}{2} M v_G^2.
\end{aligned}$$

Théorème (Théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque).
On a

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G.$$

Complément (Preuve). Nous avons démontré que si O est un point fixe, le moment cinétique total par rapport à O satisfait l'équation

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}.$$

En utilisant le théorème du transfert, on en déduit que pour un point A quelconque, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M \vec{v}_G) \\
&= \underbrace{\frac{d\vec{L}_O}{dt}}_{=\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{AO}\right)}_{=-\vec{v}_A} \wedge M \vec{v}_G + \vec{AO} \wedge \underbrace{M \vec{a}_G}_{=\vec{F}^{\text{ext}}},
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} &= \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \vec{AO} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \\
&= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}.
\end{aligned}$$

Conséquences.

1. $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}}$ puisque $\vec{v}_G \wedge m \vec{v}_G = \vec{0}$;
2. $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ si $\vec{v}_A = \vec{0}$ (c'est le théorème général en un point fixe);
3. $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ si $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_G$.

Le théorème du moment cinétique prend une forme particulièrement simple en un point fixe du solide ou au centre de masse.

Résumé.

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \quad \text{si } A = G, A \text{ fixe ou } \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G.$$

Enfin, les théorèmes relatifs à l'énergie d'un point matériel s'étendent directement au cas des solides.

Théorème (Théorèmes de l'énergie pour un solide).

- La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures.
- S'il n'y a que des forces conservatives qui travaillent, l'énergie mécanique est conservée.

Remarques.

- Le travail des forces fait intervenir la vitesse au point d'application.
- L'énergie potentielle du poids est donnée par Mgz_G , où z_G est la coordonnée verticale du centre de masse.
- Dans un solide, les forces intérieures ne travaillent pas parce que la puissance des forces entre deux points i et j est nulle. En effet, cette puissance est donnée par

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j + \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{M_i M_j}) = 0,$$

car, d'après la forme forte de la 3ème loi de Newton, $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est parallèle à $\overrightarrow{M_i M_j}$, donc perpendiculaire à $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{M_i M_j}$. Ce n'est bien sûr pas vrai pour un ensemble quelconque de points matériels.

IV. Calcul du moment cinétique

Dans un solide considéré comme un ensemble de points matériels de masses m_i , la vitesse de chaque point matériel i est donnée par

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i},$$

où A est un point du solide et $\vec{\omega}$ la vitesse instantanée de rotation. Ainsi, le moment cinétique en A peut s'exprimer uniquement à l'aide de \vec{v}_A et $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i,$$

que l'on peut développer :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}) \\ &= \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \right)}_{=M \overrightarrow{AG}} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \underbrace{\overrightarrow{AM_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})}_{= \overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i}}, \end{aligned}$$

soit

$$\vec{L}_A = M \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i} \right).$$

1. Cas particulier : point fixe ou centre de masse

Si $A = G$, ou si A est fixe ($\vec{v}_A = \vec{0}$), on a

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i} \right).$$

Plaçons-nous dans un repère cartésien $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point M_i , alors

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

et

$$\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

car

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

La composante suivant \vec{e}_x du vecteur $\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i}$ est donnée par

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i.$$

Le terme $x_i^2 \omega_x$ se simplifie, et il reste

$$(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z.$$

Des formules équivalentes sont aisément établies pour les composantes suivant \vec{e}_y et \vec{e}_z , d'où

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \begin{pmatrix} (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \end{pmatrix},$$

que l'on peut écrire de façon plus compacte à l'aide d'une matrice 3×3 :

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

que l'on réécrit simplement

$$\boxed{\vec{L}_A = \bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}}$$

avec $\bar{\bar{I}}_A$, la **matrice d'inertie**¹ au point A :

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend de l'orientation du trièdre $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ choisi pour exprimer les coordonnées x_i, y_i, z_i et $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Comme elle est symétrique, il doit exister² un trièdre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans lequel cette matrice prend une forme diagonale :

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Si l'on désigne par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes de $\vec{\omega}$ dans cette base, on a le résultat fondamental suivant :

$$\boxed{\vec{L}_A = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3.}$$

Les vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 définissent les **axes principaux** du tenseur d'inertie au point A . Les éléments diagonaux I_1, I_2 et I_3 sont appelés les **moments principaux d'inertie**.

1. On parle aussi parfois de **tenseur d'inertie**.

2. Voir cours d'algèbre.

Remarques.

1. Les vecteurs principaux et les moments principaux dépendent du point A .
2. $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est appelé un **repère d'inertie**.
3. En général, \vec{L}_A n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, sauf dans les cas suivants :
 - $\vec{\omega}$ est parallèle à un vecteur principal d'inertie, par exemple \vec{e}_1 , alors $\vec{L}_A = I_1 \vec{\omega}$;
 - deux moments d'inertie sont égaux, par exemple $I_1 = I_2 = I$, et $\vec{\omega}$ est dans le plan engendré par (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , alors $\vec{L}_A = I \vec{\omega}$;
 - tous les moments d'inertie sont égaux : $I_1 = I_2 = I_3 = I$, alors $\vec{L}_A = I \vec{\omega}$ pour tout $\vec{\omega}$.

2. Cas général

Si $A \neq G$, et si A n'est pas fixe, on a

$$\vec{L}_A = M \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \bar{I}_A \vec{\omega}.$$

C'est la formule fondamentale qui permet d'exprimer le moment cinétique en un point A du solide en fonction de \vec{v}_A et de $\vec{\omega}$. En pratique, on essaiera de se placer en un point fixe ou au centre de masse.

Le calcul du tenseur d'inertie en un point est compliqué car il faut remplacer les sommes par des intégrales :

$$\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \longrightarrow \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \sum_i m_i x_i y_i \longrightarrow \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) xy,$$

où $\rho(\vec{r})$ est la masse volumique du solide au point \vec{r} . Par ailleurs, la diagonalisation n'est pas simple.

En pratique, on peut s'en sortir simplement à l'aide de quelques résultats faciles à démontrer.

3. Moment d'inertie par rapport à un axe

Définition. Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ est défini par

$$I_\Delta = \sum_i m_i d_i^2$$

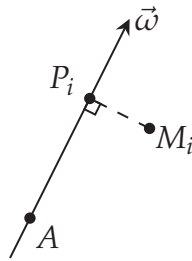
où d_i est la distance de la masse m_i à l'axe Δ

Proposition. Si A est un point fixe, ou si A est le centre de masse,

$$\vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = I_\Delta \omega^2$$

où Δ est l'axe passant par A et parallèle à $\vec{\omega}$.

Preuve. Posons $\overrightarrow{AM}_i = \overrightarrow{AP}_i + \overrightarrow{P}_i M_i$, où P_i est la projection de M_i sur l'axe Δ .



On a donc

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + \overrightarrow{P_iM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + d_i^2.$$

Or,

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i (\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i})$$

et

$$\vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i (\overrightarrow{AM_i}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega})^2),$$

mais

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + d_i^2$$

et

$$(\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega})^2 = (\overrightarrow{AP_i} \cdot \vec{\omega})^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 \omega^2 \quad \text{car } \overrightarrow{P_iM_i} \perp \vec{\omega} \quad \text{et } \overrightarrow{AP_i} \parallel \vec{\omega},$$

d'où

$$\vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i d_i^2 \omega^2.$$

4. Théorème de Huygens-Steiner

Théorème (Théorème de Huygens-Steiner). Si Δ_G est l'axe parallèle à Δ passant par G , alors

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2,$$

où d est la distance entre Δ et Δ_G .

Complément (Preuve). Si A est un point fixe, on a :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A \cdot \vec{\omega} &= \sum_i m_i \left[(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i})^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega} + \overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right] \\ &= \sum_i m_i \left[(\overrightarrow{AG}^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM_i} + \overrightarrow{GM_i}^2) \omega^2 (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})^2 - (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})(\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega}) \right] \\ &= \sum_i m_i \left[\overrightarrow{GM_i}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right] + \sum_i m_i \left[\overrightarrow{AG}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})^2 \right] \\ &\quad + \sum_i m_i \left[2(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM_i}) \omega^2 - 2(\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})(\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega}) \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $\vec{L}_G \cdot \vec{\omega}$, le deuxième terme est égal à $Md^2\omega^2$ et le troisième terme peut être réécrit

$$2\left(\overrightarrow{AG} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}}_{=\vec{0}}\right) \omega^2 - 2(\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega}) \left(\underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}}_{=\vec{0}}\right) \cdot \vec{\omega};$$

il est donc nul. Finalement,

$$\vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = \underbrace{\vec{L}_G \cdot \vec{\omega}}_{=I_{\Delta_G}\omega^2} + Md^2\omega^2$$

et donc

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + Md^2.$$

5. Rotation autour d'un axe quelconque

Si Δ est un axe quelconque (et pas un axe principal d'inertie), le moment I_{Δ} peut se calculer à partir des moments principaux d'inertie. En effet, si $\vec{\omega}$ est parallèle à Δ , et si A est un point fixe sur Δ , on a :

$$I_{\Delta}\omega^2 = \vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = (\bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}.$$

Dans la base où $\bar{\bar{I}}_A$ est diagonal, on a en particulier

$$\begin{aligned} I_{\Delta}\omega^2 &= (I_1\omega_1 \vec{e}_1 + I_2\omega_2 \vec{e}_2 + I_3\omega_3 \vec{e}_3) \cdot (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \\ &= I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \end{aligned}$$

et donc finalement

$$I_{\Delta} = \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2},$$

ou encore, en posant $\vec{\omega} = \omega\vec{u}$ avec $\|\vec{u}\|^2 = 1$,

$$I_{\Delta} = I_1u_1^2 + I_2u_2^2 + I_3u_3^2.$$

Dans cette expression, u_1 , u_2 et u_3 sont les composantes d'un vecteur unitaire parallèle à Δ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ où $\bar{\bar{I}}_A$ est diagonal.

6. Symétries

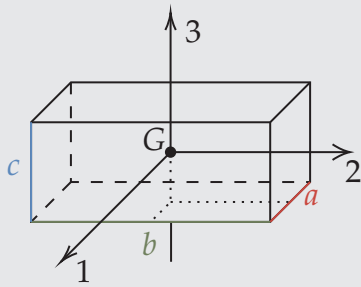
Pour les solides ayant des symétries, les axes principaux sont déterminés par les symétries. C'est particulièrement utile au point G , où les symétries fixent le plus souvent tous les axes principaux.

Règles de symétrie. Est axe principal d'inertie en A tout axe passant par A et satisfaisant l'une des propriétés suivantes :

- c'est un axe de symétrie, c'est-à-dire un axe tel qu'une rotation autour de cet axe d'angle strictement inférieur à 2π laisse le volume occupé par l'objet inchangé.
- il est perpendiculaire à un plan de symétrie passant par A , c'est-à-dire un plan qui sépare l'objet en deux parties qui sont des images miroirs l'une de l'autre.

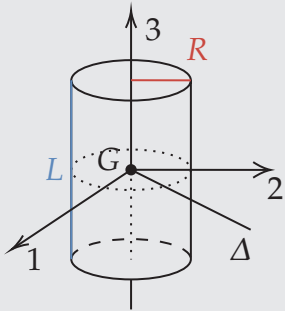
Table des principaux moments d'inertie.

On suppose que les systèmes sont homogènes.



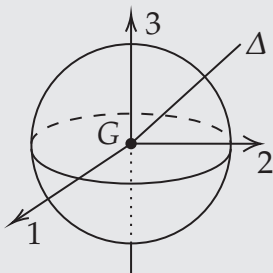
$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2) \\ I_2 = \frac{1}{12}M(c^2 + a^2) \\ I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \end{cases}$$

Parallélépipède rectangle plein



$$\begin{aligned} \text{Plein : } & I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \\ & I_3 = \frac{1}{2}MR^2 \\ \text{Creux : } & I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2 \\ & I_3 = MR^2 \end{aligned}$$

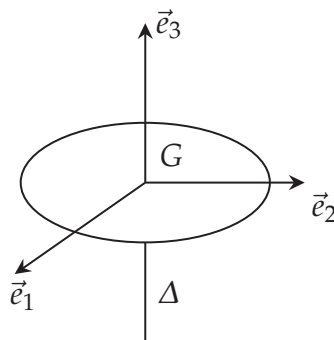
Cylindre de révolution



$$\begin{aligned} \text{Boule pleine : } & I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2 \\ \text{Sphère creuse : } & I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2 \end{aligned}$$

Sphère

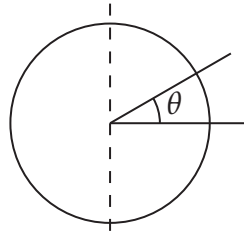
Exemple. Considérons un anneau homogène de masse M .



L'axe donné par \vec{e}_3 est un axe de symétrie. \vec{e}_1 et \vec{e}_2 (et tout vecteur dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2)) sont perpendiculaires à un plan vertical passant par Δ . Par exemple, \vec{e}_1 est perpendiculaire au plan (Δ, \vec{e}_2) , qui est un plan de symétrie. On a alors

$$I_3 = MR^2$$

qui est évident car toute la masse est à la distance R . Quant à I_1 et I_2 , ils ont la même valeur $I_1 = I_2 = I = \sum_i m_i d_i^2$. Pour la calculer, introduisons la densité linéaire λ et remplaçons la somme par une intégrale en introduisant l'angle θ .



La distance s'écrit d_i devient $d = R \cos \theta$. La densité linéaire se calcule en utilisant la masse :

$$\int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = M \implies \lambda = \frac{M}{2\pi R}.$$

On a donc

$$I = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta R^2 \cos^2 \theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{M}{2\pi R} R^3 \pi = \frac{1}{2} MR^2,$$

et finalement

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} MR^2.$$

V. Énergie cinétique

Comme $\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}$, on a

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{M_i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_A^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})}_{=M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG})} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2. \end{aligned}$$

De plus, $(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha$ et $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \alpha$ donc

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 b^2 \implies (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\overrightarrow{AM_i}^2 \omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AM_i})^2) \\ &= \frac{1}{2} \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_A \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$E_C = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_A \vec{\omega}.$$

Cas particuliers.

— Si $\vec{v}_A = \vec{0}$, alors

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_A \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2,$$

où Δ est l'axe parallèle à $\vec{\omega}$ passant par A .

— Si $A = G$, alors

$$E_C = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_G \vec{\omega}.$$

On retrouve le deuxième théorème de König, $K = \frac{1}{2} m v_G^2 + K^*$, où l'on a $K^* = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_G \vec{\omega}$.

Résumé (Moment cinétique et énergie cinétique).

Si A fixe ou $A = G$

— Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}}.$$

— Moment cinétique :

$$\vec{L}_A = \bar{I}_A \vec{\omega} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$$

avec $I_\Delta = I_{\Delta G} + M d^2$, ou encore

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G,$$

qui est toujours vrai.

— Énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \quad \text{si } A \text{ est fixe}$$

ou

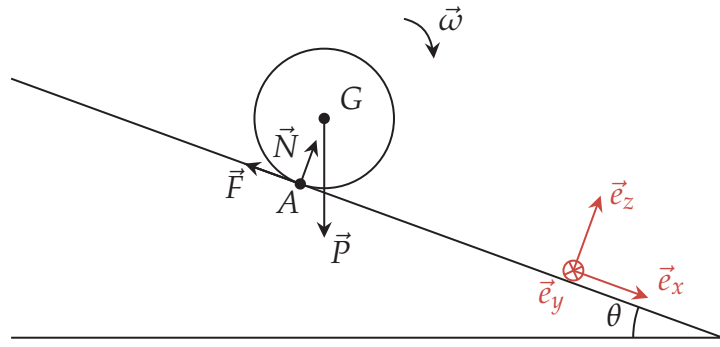
$$E_C = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G} \omega^2 \quad \text{si } A=G.$$

VI. Roulement sans glissement

Comme première application, nous allons étudier des exemples de roulement sans glissement.

1. Cylindre sur plan incliné

Considérons un cylindre de rayon R et de masse M . Le moment d'inertie par rapport à l'axe ($G \vec{e}_y$) est $I = kMR^2$ avec $k = \frac{1}{2}$ si le cylindre est plein ou $k = 1$ s'il est creux. Le point A est sur l'axe de contact entre le cylindre et le plan incliné, dans le même plan perpendiculaire à l'axe du cylindre que G . Quelle est la condition de roulement sans glissement? Quelle est la vitesse à l'arrivée après une descente de h ?



Posons $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Le mouvement est complètement déterminé si l'on connaît $\vec{v}_G(t)$ et $\vec{\omega}(t)$. Or,

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}.$$

S'il y a roulement sans glissement, alors $\vec{v}_A = \vec{0}$, où A est le point sur l'axe instantané de rotation dans le même plan parallèle à \vec{e}_x et \vec{e}_z que G , et

$$\vec{v}_G = \omega \vec{e}_y \wedge R \vec{e}_z = \omega R \vec{e}_x.$$

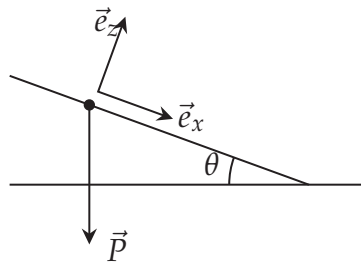
Le mouvement est donc totalement déterminé par $\omega(t)$.

Comment trouver $\omega(t)$? Le plus simple est d'appliquer un théorème qui ne fait pas intervenir de forces inconnues. Or, les forces de réaction du plan incliné sur le cylindre sont symétriques par rapport à A , et leurs moments se compensent puisqu'ils font intervenir les mêmes forces avec des vecteurs \overrightarrow{AM} opposés. Du coup, seul le moment du poids va rester, et le plus simple est alors d'appliquer le théorème du moment cinétique en A . Comme $\vec{v}_A = \vec{0}$, il prend la forme

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_z \wedge \vec{P}.$$

Calculons les angles utiles :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_x} \right) &= \frac{\pi}{2} - \theta \implies \cos \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_x} \right) = \sin \theta, \\ \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_z} \right) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta \implies \cos \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_z} \right) = -\cos \theta. \end{aligned}$$



On a

$$\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = R \vec{e}_z \wedge Mg (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) = MRg \sin \theta \vec{e}_y.$$

Par ailleurs, l'axe (A, \vec{e}_y) est perpendiculaire à un plan de symétrie du cylindre. C'est donc un axe principal d'inertie. Comme $\vec{\omega}$ est parallèle à cet axe, on a :

$$\vec{L}_A = I_{\Delta_A} \vec{\omega} = I_{\Delta_A} \omega \vec{e}_y.$$

Le théorème du moment cinétique conduit donc à l'équation :

$$I_{\Delta_A} \dot{\omega} = MRg \sin \theta.$$

D'après le théorème de Huygens-Steiner,

$$I_{\Delta_A} = I + MR^2 = (k + 1) MR^2$$

et donc

$$\dot{\omega} = \frac{MRg \sin \theta}{(k + 1) MR^2},$$

soit finalement

$$\dot{\omega} = \frac{g}{(k + 1) R} \sin \theta.$$

À partir de là, on peut tout calculer :

$$\vec{v}_G = \omega R \vec{e}_x \implies \vec{a}_G = \dot{\omega} R \vec{e}_x = \frac{g \sin \theta}{k + 1} \vec{e}_x.$$

Le principe fondamental s'écrit

$$M \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}.$$

La projection selon \vec{e}_x donne

$$\begin{aligned} M \vec{a}_G \cdot \vec{e}_x &= \vec{P} \cdot \vec{e}_x + \vec{N} \cdot \vec{e}_x + \vec{F} \cdot \vec{e}_x \\ \frac{Mg \sin \theta}{k + 1} &= Mg \sin \theta + F_x \\ F_x &= -Mg \sin \theta \left(1 - \frac{1}{k + 1} \right). \end{aligned}$$

La projection de la force de frottement sur \vec{e}_x est négative, ce qui est normal car c'est elle qui induit le mouvement de rotation. Sa norme est donnée par

$$F = Mg \sin \theta \frac{k}{k + 1}.$$

La projection selon \vec{e}_z donne

$$0 = \vec{P} \cdot \vec{e}_z + N \implies 0 = -Mg \cos \theta + N_z,$$

soit

$$N_z = Mg \cos \theta.$$

Cette force est bien orientée vers le haut, et sa norme est donnée par :

$$N = Mg \cos \theta.$$

— **Condition de roulement sans glissement** : il faut que $F \leq \mu_s N$:

$$\begin{aligned} Mg \sin \theta \frac{k}{k + 1} &\leq \mu_s Mg \cos \theta \\ \tan \theta &\leq \mu_s \left(1 + \frac{1}{k} \right), \end{aligned}$$

soit

$$\tan \theta \leq 2\mu_s$$

si le cylindre est creux et

$$\tan \theta \leq 3\mu_s$$

s'il est plein. Cette condition est moins stricte que celle d'un solide qui glisse ($\tan \theta \leq \mu_s$ du chapitre 4).

— **Vitesse à l'arrivée** : à $t = 0$, $\omega = 0$, $\vec{v}_G = \vec{0}$ et $x_G = 0$. On a

$$\dot{\omega} = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta \implies \omega = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta t,$$

donc

$$\dot{x}_G = R\omega = \frac{g}{k+1} \sin \theta t$$

et ainsi

$$x_G = \frac{1}{2} \frac{g}{k+1} \sin \theta t^2.$$

À l'arrivée,

$$x_G = \frac{h}{\sin \theta}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g}{k+1} \sin \theta t^2 &= \frac{h}{\sin \theta} \\ t^2 &= \frac{2(k+1)h}{g} \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ t &= \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta} \\ \dot{x}_G &= \frac{g}{k+1} \sin \theta \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta} \\ \dot{x}_G &= \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$v_G = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}},$$

soit

$$v_G = \sqrt{gh}$$

si le cylindre est creux et

$$v_G = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

s'il est plein. Ces vitesses sont plus petites que pour un glissement sans frottement ($v = \sqrt{2gh}$ du chapitre 4).

Méthodes alternatives.

— **Théorème du moment cinétique en G** :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \underbrace{\vec{G}\vec{A} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{G}\vec{A} \wedge \vec{F} = -R\vec{e}_z \wedge (-F\vec{e}_x) = RF\vec{e}_y$$

avec $\vec{L}_G = I\vec{\omega}$ car l'axe ($G\vec{e}_y$) est un axe principal d'inertie d'où

$$I\dot{\omega} = RF.$$

Combinée avec les autres équations tirées du principe fondamental $M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$, on retrouve bien sûr la même solution.

— **Théorème de l'énergie mécanique** : la force de frottement ne travaille pas car $\vec{v}_A = \vec{0}$. Ainsi, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie cinétique est donnée par

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}kMR^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(k+1)MR^2\omega^2. \end{aligned}$$

On peut aussi la calculer comme

$$K = \frac{1}{2}I_{\Delta_A}\omega^2 = \frac{1}{2}(k+1)MR^2\omega^2.$$

Au départ, $K = 0$ et $V = Mgh$. À l'arrivée, $K = \frac{1}{2}(k+1)MR^2\omega^2$ et $V = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(k+1)MR^2\omega^2 &= Mgh \\ \omega^2 &= \frac{2gh}{(k+1)R^2} \end{aligned}$$

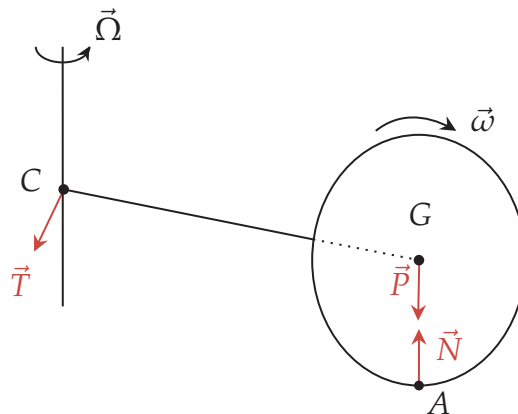
et l'on retrouve

$$v_G = \omega R = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}.$$

Remarque. Comme pour un solide qui glisse, les frottements ralentissent le système et diminuent la vitesse finale, mais cette fois les frottements ne travaillent pas. Ils transforment une partie de l'énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation.

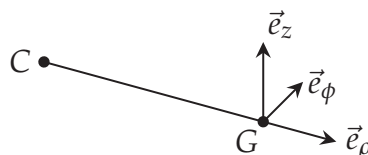
2. Meule

Considérons un disque qui roule sans glisser, de rayon R et de masse M relié à une tige de longueur $d = GC$ horizontale de masse négligeable tournant à $\vec{\Omega}$. On suppose que l'interaction entre la tige et l'axe vertical se réduit à une force \vec{T} appliquée en C . Question : Calculer la force de réaction \vec{N} du sol sur la meule.



On choisit le repère $(C, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, de sorte que

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = -\omega \vec{e}_\rho.$$



1. **Relation entre Ω et ω .**

$\vec{v}_C = \vec{0}$ nous donne

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{CG} \\ &= (-\omega \vec{e}_\rho + \Omega \vec{e}_z) \wedge d \vec{e}_\rho = \Omega d \vec{e}_\phi,\end{aligned}$$

et $\vec{v}_A = \vec{0}$ nous donne

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{AG} \\ &= (-\omega \vec{e}_\rho + \Omega \vec{e}_z) \wedge R \vec{e}_z = R\omega \vec{e}_\phi,\end{aligned}$$

dont on déduit finalement

$$\boxed{\Omega d = R\omega.}$$

2. **Théorème du moment cinétique.**

Pour se débarrasser de \vec{T} , on va appliquer le théorème du moment cinétique en C :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}}.$$

a) **Calcul de \vec{L}_C .** On a

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Or,

$$\vec{L}_G = I_3 \vec{\omega} + I_1 \vec{\Omega}$$

car $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont dirigés selon des axes principaux. Les moments d'inertie se calculent facilement, il s'agit du cas particulier d'un cylindre plein avec $L = 0$:

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{2}MR^2 \\ I_1 = \frac{1}{4}MR^2 \end{cases}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\vec{L}_G &= \frac{1}{4}MR^2\Omega \vec{e}_z - \frac{1}{2}MR^2\omega \vec{e}_\rho \\ \vec{L}_C &= \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge M \vec{v}_G \\ &= \vec{L}_G + d \vec{e}_\rho \wedge MR\omega \vec{e}_\phi \\ &= \vec{L}_G + dMR\omega \vec{e}_z = \vec{L}_G + Md^2\Omega \vec{e}_z\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{L}_C = \left(\frac{1}{4}MR^2 + Md^2 \right) \Omega \vec{e}_z - \frac{1}{2}MR^2\omega \vec{e}_\rho.$$

Au cours du mouvement, \vec{e}_z ne change pas :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_C}{dt} &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \\ &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \\ &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}MR^2\omega\Omega \vec{e}_\phi.$$

b) **Moment des forces.** On calcule simplement :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} &= \vec{CG} \wedge M\vec{g} + \vec{CA} \wedge \vec{N} \\ &= d\vec{e}_\rho \wedge (-Mg)\vec{e}_z + \vec{CG} \wedge \vec{N} + \underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}} \\ &= d\vec{e}_\rho \wedge (-Mg\vec{e}_z + N\vec{e}_z) \\ &= d(Mg - N)\vec{e}_\phi.\end{aligned}$$

Finalement, en réunissant les deux :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}MR^2\omega\Omega &= d(Mg - N) \\ -\frac{1}{2}MRd\Omega^2 &= d(Mg - N),\end{aligned}$$

et enfin

$$N = Mg + \frac{MR\Omega^2}{2}.$$

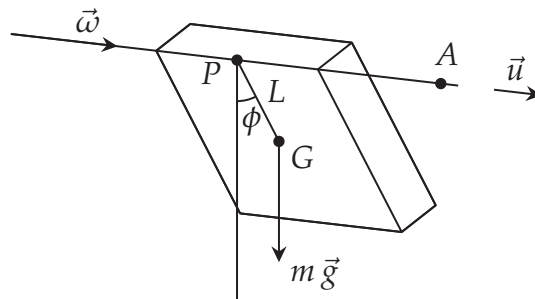
Remarques.

- $N > Mg$: du fait de son mouvement, la meule appuie plus fort sur le sol.
- Si l'on avait pris en compte une force de frottement $\vec{F} = -F\vec{e}_\phi$, il serait apparu un moment $-dF\vec{e}_z - RF\vec{e}_\rho$. Comme la dérivée du moment cinétique n'a pas de composante suivant \vec{e}_ρ et \vec{e}_z , on en déduit que la force de frottement doit être nulle. Ceci n'est qu'une approximation. Il doit y avoir une force de frottement pour que le disque de la meule roule sans glisser. Cela implique que l'interaction entre la tige et l'axe ne se réduit pas exactement à une force, mais qu'elle doit aussi impliquer un couple (c'est-à-dire un moment local).

VII. Rotation autour d'un axe fixe

1. Pendule physique

On appelle pendule physique tout solide pouvant tourner autour d'un axe fixe. Prenons l'exemple d'un parallélépipède.



Utilisons le théorème du moment cinétique au point A sur l'axe :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}.$$

Le vecteur \vec{u} étant indépendant du temps, on a

$$\frac{d\vec{L}_A \cdot \vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u}.$$

On a

$$\vec{L}_A \cdot \vec{u} = \vec{L}_A \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = I_\Delta \omega = I_\Delta \dot{\phi}$$

avec

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + ML^2.$$

De l'autre côté,

$$\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = (\vec{AG} \wedge M \vec{g}) \cdot \vec{u}$$

car les forces exercées au niveau de l'axe ont un moment perpendiculaire à \vec{AM} , où M est le point d'application, donc à \vec{u} . Alors

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u} &= \underbrace{(\vec{AP} \wedge M \vec{g})}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{AP} // \vec{u}} + (\vec{PG} \wedge M \vec{g}) \cdot \vec{u} \\ &= -LMg \sin \phi. \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_\Delta \ddot{\phi} = -LMg \sin \phi,$$

et enfin

$$\boxed{\ddot{\phi} = -\frac{LMg}{I_\Delta} \sin \phi.}$$

Méthode alternative. On aurait pu utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

$$K = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\phi}^2 \quad \text{et} \quad V = -MgL \cos \phi,$$

qui mène à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\phi}^2 - MgL \cos \phi &= \text{cte} \\ I_\Delta \dot{\phi} \ddot{\phi} + MgL \sin \phi \dot{\phi} &= 0 \\ I_\Delta \ddot{\phi} &= -MgL \sin \phi. \end{aligned}$$

Remarque. Si toute la masse est concentrée en G (cas du point matériel), alors

$$I_{\Delta_G} = 0 \quad \text{et} \quad I_\Delta = ML^2$$

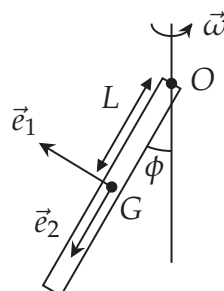
et

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi.$$

On retrouve l'équation du pendule.

2. Pendule tournant

Considérons un pendule physique tournant à $\vec{\omega}$ constant. On cherche à déterminer l'angle ϕ .



On appelle I_{\perp} et $I_{//}$ les moments d'inertie en G suivant les axes principaux \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Alors le moment cinétique en G s'écrit

$$\vec{L}_G = I_{\perp} \omega_1 \vec{e}_1 + I_{//} \omega_2 \vec{e}_2$$

avec $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2$ et

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = \omega \sin \phi \quad \text{et} \quad \omega_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = -\omega \cos \phi.$$

Alors

$$\vec{L}_G = \omega I_{\perp} \sin \phi \vec{e}_1 - \omega I_{//} \cos \phi \vec{e}_2.$$

Pour éliminer la force de réaction en O , le plus simple est d'appliquer le théorème du moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Avec

$$\vec{v}_G = v_G \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad v_G = L \omega \sin \phi,$$

on a

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_G + ML \vec{e}_2 \wedge L \omega \sin \phi \vec{e}_3 \\ &= \vec{L}_G + ML^2 \omega \sin \phi \vec{e}_1 \\ &= (I_{\perp} + ML^2) \omega \sin \phi \vec{e}_1 - I_{//} \omega \cos \phi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Comme ω et ϕ sont constants, la seule dépendance en t vient de \vec{e}_1 et \vec{e}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = \omega_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\omega_2 \vec{e}_3 \\ &= \omega \cos \phi \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_3 \\ &= \omega \sin \phi \vec{e}_3. \end{aligned}$$

On en déduit la dérivée :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (I_{\perp} + ML^2 - I_{//}) \omega^2 \sin \phi \cos \phi \vec{e}_3.$$

Le moment est

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} &= \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{g} \\ &= L \vec{e}_2 \wedge (-Mg \sin \phi \vec{e}_1 + Mg \cos \phi \vec{e}_2) \\ &= MgL \sin \phi \vec{e}_3, \end{aligned}$$

d'où

$$(I_{\perp} - I_{//} + ML^2) \omega^2 \sin \phi \cos \phi = MgL \sin \phi$$

et finalement

$$\cos \phi = \frac{MgL}{\omega^2 (I_{\perp} - I_{//} + ML^2)},$$

ou encore

$$\boxed{\cos \phi = \frac{g}{\omega^2 L} \frac{1}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{//}}{ML^2}}.}$$

$\cos \phi = \frac{g}{\omega^2 L}$ est le résultat pour un point matériel de masse M en G . (C'est le même problème que celui de la bille dans un cerceau en rotation vu dans le chapitre sur les coordonnées cylindriques et sphériques). Pour un objet étendu, $\cos \phi$ est plus petit, donc ϕ est plus grand, tant que $I_{\perp} > I_{//}$, ce qui est le cas pour une barre. Si l'objet suspendu était une plaque perpendiculaire à \vec{e}_2 , ce serait l'inverse puisque dans ce cas $I_{\perp} < I_{//}$.

Remarque. Dans le cas de la bille dans un cerceau, on a pu résoudre le problème sans utiliser le théorème du moment cinétique parce que la direction de la force exercée sur la bille est connue : elle pointe vers le point O . Dans le cas présent, on peut se convaincre que ce n'est pas le cas. Si on appelle \vec{T} la force exercée par l'axe sur la barre, l'équation $M\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{T}$ permet de démontrer que $\vec{T} \cdot \vec{e}_1 = M \sin \phi (g - L\omega^2 \cos \phi)$, ce qui n'est pas nul sauf si $\cos \phi = g/(\omega^2 L)$, c'est-à-dire si $I_{\perp} = I_{\parallel}$.

VIII. Mouvement autour d'un point fixe

1. Équations d'Euler (complément)

Complément. Pour décrire le mouvement d'un solide autour d'un point fixe C , il est utile de considérer le repère $(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 sont les axes principaux d'inertie en C . Le mouvement du solide est complètement décrit par un vecteur $\vec{\omega}(t)$, que l'on peut découper en

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3.$$

Le moment cinétique en C est donné par

$$\vec{L}_C = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3,$$

où I_1, I_2 et I_3 sont les moments principaux d'inertie.

La dérivée de \vec{L}_C est donnée par

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_1 \left(\dot{\omega}_1 \vec{e}_1 + \omega_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right) + I_2 \left(\dot{\omega}_2 \vec{e}_2 + \omega_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right) + I_3 \left(\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 + \omega_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 \\ &= -\omega_2 \vec{e}_3 + \omega_3 \vec{e}_2. \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \omega_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = -\omega_1 \vec{e}_2 + \omega_2 \vec{e}_1,$$

d'où

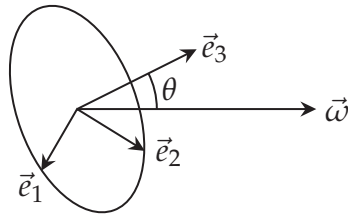
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= (I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3) \vec{e}_1 \\ &\quad + (I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3) \vec{e}_2 \\ &\quad + (I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique conduit aux équations d'Euler :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3, \\ \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3, \\ \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned}$$

Les applications de ces équations sont multiples et fascinantes.

Exemple. Équilibrage d'une roue Une roue est bien équilibrée si elle tourne autour d'un de ses axes d'inerties, disons \vec{e}_3 .



Dans ce cas, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega = \text{cte}$, et $\vec{M}_C^{\text{ext}} = \vec{0}$. Il n'y a pas de moment exercé sur les axes, et on ne sent pas la rotation des roues.

Si par contre $\vec{\omega}$ n'est pas parfaitement aligné avec \vec{e}_3 , le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tournant autour de $\vec{\omega}$, les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans ce repère sont données par

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin \theta \sin(\omega t) \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \cos(\omega t) \\ \omega_3 = \omega \cos \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) \\ \dot{\omega}_2 = -\omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} .$$

Par ailleurs, $I_1 = I_2 = I_{\perp}$ et $I_3 = I_{\parallel}$. On en déduit que les composantes de \vec{M}_C^{ext} sur \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ne sont pas nulles, mais sont données par

$$\begin{aligned} \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) , \\ \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) . \end{aligned}$$

Le moment des forces exercées sur la roue dépend du temps de façon périodique, d'où les vibrations de fréquence ω ressenties, et des contraintes sur les axes. En plaçant des masses sur la jante, le garagiste parvient à réaligner \vec{e}_3 avec l'axe de rotation de la roue.

Solide en rotation libre Considérons un solide en rotation autour d'un point fixe O tel qu'en ce point le moment des actions extérieures soit nul. Ce serait par exemple le cas d'un objet soumis à la seule action de la pesanteur dans le référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel, G est fixe et le moment du poids en G est nul puisqu'il s'applique en G .

Proposition. Toute rotation autour d'un axe principal d'inertie est stationnaire.

Preuve. Dans ce cas, les équations d'Euler se réduisent à

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} .$$

Elles ont trois solutions évidentes :

- $\omega_1 = \text{cte}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ et l'on a une rotation stationnaire autour de l'axe principal de moment I_1 ;
- $\omega_2 = \text{cte}$ et $\omega_1 = \omega_3 = 0$;
- $\omega_3 = \text{cte}$ et $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Exemple. La rotation d'un ballon de rugby autour de son axe de révolution est stationnaire. De même, la rotation autour d'un axe perpendiculaire à cet axe est stationnaire. Par contre, la rotation par rapport à un axe quelconque ne l'est pas. Si par contre l'on considère un ballon de foot, qui est sphérique, tout axe est un

| axe principal d'inertie, et toute rotation est stationnaire.

Stabilité des solutions. Supposons que $\dot{\omega}_1 = 0$, alors $\omega_1 = \text{cte}$. Considérons de petites variations autour de $\omega_2 = \omega_3 = 0$. D'après les équations d'Euler, on a

$$\begin{cases} I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 = 0 \\ I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases} ,$$

qui mène à

$$\begin{cases} I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) (I_1 - I_2) \omega_1^2 \omega_2 = 0 \\ I_3 I_2 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) (I_3 - I_1) \omega_1^2 \omega_3 = 0 \end{cases} .$$

ω_2 et ω_3 vont décrire de petites oscillations tant que l'équation est de la forme

$$A\ddot{x} + Bx = 0 \quad \text{avec} \quad A \text{ et } B > 0 ,$$

soit

$$(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0 \implies I_1 > I_2, I_3 \quad \text{ou} \quad I_1 < I_2, I_3 .$$

Proposition. Conclusion : Les oscillations sont stables si elles ont lieu autour d'un axe correspondant au plus grand ou au plus petit des moments d'inertie, mais pas au moment d'inertie intermédiaire.

2. Gyroscope

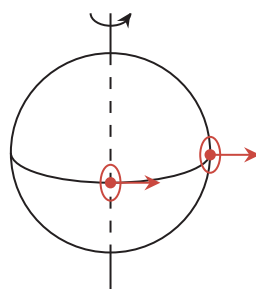
Définition (Gyroscope). Un gyroscope est un solide de révolution tournant autour de son axe, en général à très grande vitesse $\vec{\Omega}$, et suspendu par son centre de masse G de façon parfaite, c'est-à-dire pouvant choisir librement son orientation sans aucune résistance.

Proposition. Dans un référentiel galiléen, $\vec{\Omega} = \vec{cte}$.

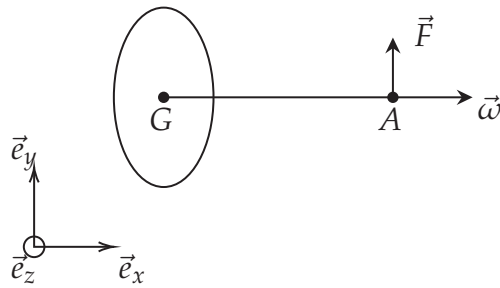
Preuve. $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{0}$ puisque les seules forces, le poids et la réaction au point de fixation, passent par G et ont un moment nul. Or, comme le gyroscope tourne autour de son axe de révolution, qui est un axe principal d'inertie, $\vec{L}_G = I\vec{\Omega}$. Donc,

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0} .$$

Application. Dans le référentiel de Ptolémée, qui est une bonne approximation d'un référentiel galiléen, $\vec{\Omega}$ est constant. Or, la Terre tourne sur elle-même. Donc le gyroscope tourne par rapport à la Terre pour garder une orientation fixe par rapport à un point du ciel déterminé par des étoiles fixes. À l'équateur, si son axe est horizontal à midi, il est vertical à 18 h.



Comportement paradoxal. Si l'on applique une force verticale sur un gyroscope d'axe horizontal, il dévie dans le plan horizontal.



Explication. On a

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{GA} \wedge \vec{F} = GAF \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = GAF \vec{e}_z,$$

soit

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{GAF}{I} \vec{e}_z,$$

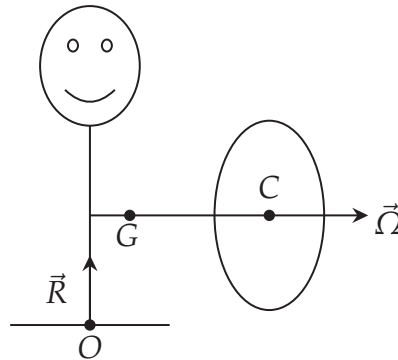
qui est parallèle à \vec{e}_z et donc orthogonal à \vec{F} !

3. Effets gyroscopiques

On parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un objet de révolution (disque, roue, etc.) dont la rotation autour de son axe a pour effet de résister aux changements de son orientation.

Exemples.

1. Personne sur tabouret avec roue de vélo en rotation.



Il y a deux forces extérieures :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \underbrace{M \vec{g}}_{\text{poids total}} + \underbrace{\vec{R}}_{\text{réaction du sol}}.$$

Toutes les forces sont verticales :

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \vec{GO} \wedge \vec{R} \perp \vec{R} \implies \vec{M}_G^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Ainsi, $\frac{d(\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z)}{dt} = 0$, où \vec{L}_G est le moment cinétique total en G. Au départ, $\vec{L}_G = \vec{L}_C^* + \vec{GC} \wedge m \vec{v}_C$, où m est la masse de la roue et $\vec{v}_C = \vec{0}$ est la vitesse du centre de la roue. On a aussi

$$\vec{L}_C^* = I \vec{\Omega} \implies \vec{L}_G \cdot \vec{e}_z = I \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Si l'on change l'inclinaison de la roue, la conservation de $\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z$ implique une rotation du tabouret à la vitesse $\vec{\omega}$ telle que la composante \vec{e}_z de \vec{L}_G reste nulle. En effet, si $\vec{\omega} = \vec{0}$, on aurait

$$\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z = I \vec{\Omega}' \cdot \vec{e}_z \neq 0$$

où $\vec{\Omega}'$ est la nouvelle orientation du vecteur rotation de la roue. Dans le cas où la roue est à la verticale de la tête de la personne, on a

$$\vec{L}_G = I(\Omega \vec{e}_z + \vec{\omega}) + I_{P+T} \vec{\omega},$$

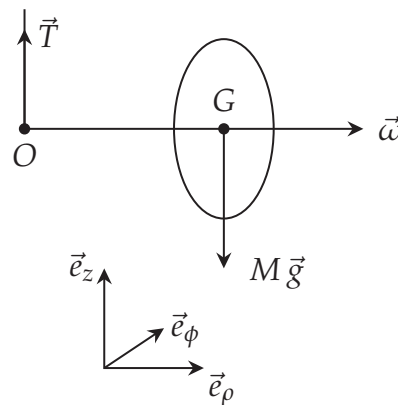
avec I_{P+T} le moment d'inertie par rapport à \vec{e}_z de la personne et du tabouret.

Par conservation du moment cinétique parallèle à \vec{e}_z , on a $\vec{L}_G = \vec{0}$ et donc

$$\vec{\omega} = -\frac{I}{I + I_{P+T}} \Omega \vec{e}_z.$$

On a un effet similaire si au départ le vecteur rotation de la roue est perpendiculaire à GC et horizontal, et qu'on fait pivoter la roue pour que sa vitesse $\vec{\Omega}$ acquière une composante verticale.

2. Roue de vélo suspendue en un point de son axe de rotation.



Le théorème du moment cinétique en G conduit à :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* = \vec{OG} \wedge \vec{T} \quad \text{avec} \quad \vec{L}_G^* = I \vec{\omega}.$$

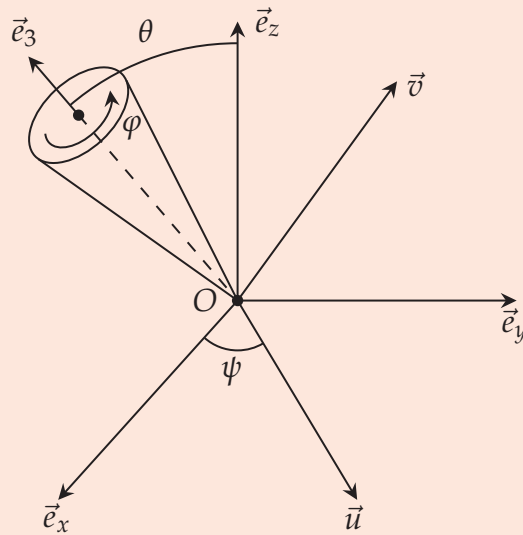
En première approximation, $\vec{T} + \vec{P} \simeq \vec{0}$ car le centre de masse G a un mouvement de rotation très lent, donc une accélération centripète très petite. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* \simeq \vec{OG} \wedge M \vec{g} \implies I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = OGMg \vec{e}_\phi.$$

L'axe de la roue reste dans le plan horizontal et tourne autour du point O . C'est un mouvement de précession.

4. Toupie

Définitions (Toupie, angles d'Euler). Une toupie est un objet à symétrie de révolution qui tourne autour de son axe de révolution. Il est commode de prendre cette extrémité comme origine du repère.



Il est commode de repérer la toupie par trois angles dits **angles d'Euler**. Les mouvements associés sont

$$\begin{cases} \dot{\varphi} \vec{e}_3 : \text{rotation propre;} \\ \dot{\psi} \vec{e}_z : \text{précession;} \\ \dot{\theta} \vec{u} : \text{nutation;} \end{cases}$$

avec \vec{e}_3 l'axe de révolution de la toupie, \vec{u} le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_3$ et $\vec{v} = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$.

Dans l'**approximation gyroscopique**, on suppose que la vitesse de rotation propre est beaucoup plus grande que les autres. Dans ces conditions, le moment cinétique au point O est le long de \vec{e}_3 , et le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m \vec{g} \simeq \vec{L}_O \wedge m \vec{g} \frac{\ell}{L_O} = \frac{mg\ell}{L_O} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$$

avec $\ell = OG$. Le vecteur \vec{L}_O , et donc la toupie, ont un mouvement de précession autour de la verticale \vec{e}_3 , avec une vitesse angulaire

$$\dot{\psi} = \frac{mg\ell}{L_O} = \frac{mg\ell}{I_3 \dot{\varphi}}$$

La vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre.

Un traitement plus détaillé basé sur les équations d'Euler permet de montrer qu'il y a aussi un mouvement de nutation autour d'une valeur de θ , avec des oscillations entre θ_1 et θ_2 . Il existe néanmoins des solutions particulières $\theta = \theta_0$ constant, auquel cas le mouvement est un pur mouvement de précession.

Remarque. Pour passer de l'équation

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{mg\ell}{L_O} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$$

à la conclusion qu'il s'agit d'un mouvement de précession, on peut se reporter à la démonstration de la section II. du chapitre 2 du fait que l'équation $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ conduit à une précession de \vec{OM} autour de $\vec{\omega}$.

Complément (Traitement détaillé de la toupie). Il est commode d'introduire le vecteur \vec{v} qui forme avec \vec{e}_3 et \vec{u} un repère orthonormé :

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{v}.$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{e}_3 + \dot{\psi} \vec{e}_z \\ &= \dot{\theta} \vec{u} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}_3 + \dot{\psi} \sin \theta \vec{v}.\end{aligned}$$

Dans le référentiel de la toupie, on a donc $\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$.

Le moment cinétique par rapport à O est donné par

$$\vec{L}_O = I_1 \dot{\theta} \vec{u} + I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}_3 + I_1 \dot{\psi} \sin \theta \vec{v},$$

où I_3 est le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution et I_1 le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par O (donc en particulier les axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v})).

Le moment du poids par rapport à O est donné par

$$\vec{M}_O = \ell \vec{e}_3 \wedge m \vec{g} = -mg\ell (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_z).$$

Il en découle que

$$\vec{M}_O \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z = 0.$$

La première équation implique que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Or,

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 = -\dot{\theta} \vec{v} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{u},$$

ce qui implique que

$$\vec{L}_O \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \vec{e}_3) = 0,$$

et donc que

$$L_3 \equiv \vec{L}_O \cdot \vec{e}_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{cte.}$$

Par ailleurs, $\vec{M}_O \cdot \vec{e}_z = 0$ implique que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \vec{e}_z) = 0$$

et finalement

$$L_z \equiv \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta = \text{cte.}$$

Enfin, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}^2 + I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta), \\ V &= mg\ell \cos \theta,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mg\ell \cos \theta = \text{cte.}$$

En utilisant les constantes L_3 et L_z , on peut éliminer $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$ de l'énergie mécanique. En effet,

$$L_z = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta \implies \dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \frac{L_3}{I_3}.$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + mgl \cos \theta$$

ou encore

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta),$$

avec

$$V_{\text{eff}}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3}.$$

Ce potentiel a un minimum en θ_0 défini par

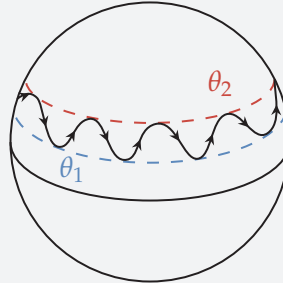
$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = -mgl \sin \theta + \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} L_3 \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} \cos \theta = 0.$$

Posons $E_0 = V_{\text{eff}}(\theta_0)$.

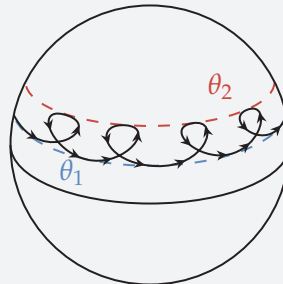
- Si $E > E_0$, alors θ oscille entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .
- Si $E = E_0$, alors $\theta = \theta_0 = \text{cte}$.

Nature du mouvement. Pour $E > E_0$, comme $\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$, deux cas de figure peuvent se présenter.

- $\dot{\psi}$ ne change pas de signe entre θ_1 et θ_2 : le centre de masse oscille simplement sur la sphère de rayon ℓ .



- $\dot{\psi}$ change de signe entre θ_1 et θ_2 : le centre de masse fait des boucles.



Pour $E = E_0$, θ_0 est donné par $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}(\theta_0) = 0$. Cette condition sur θ_0 peut se réécrire en fonction de $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$:

$$-mgl \sin \theta_0 + \dot{\psi} I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta_0) \sin \theta_0 - I_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0.$$

Dans le cas générique où $\theta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, on en déduit

$$\dot{\psi}^2 (I_3 \cos \theta_0 - I_1 \cos \theta_0) + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} - mgl = 0,$$

ou encore, en supposant $I_1 > I_3$,

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + mg\ell = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en $\dot{\psi}^2$ est

$$\Delta = I_3^2 \dot{\phi}^2 - 4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0.$$

Pour $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, un tel mouvement n'existe que si

$$I_3 \dot{\phi} > \sqrt{4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0} \equiv I_3 \dot{\phi}_{\min}.$$

Si $\dot{\phi} > \dot{\phi}_{\min}$, alors il existe deux mouvements de précession :

$$\dot{\psi}_{\pm} = \frac{I_3 \dot{\phi} \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\phi}^2 - 4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2(I_1 - I_3) \cos \theta_0}.$$

On peut montrer que c'est le mouvement de précession le plus lent décrit par $\dot{\psi}_-$ qui est stable, et donc que c'est lui qui doit être observé.