

EPFL

Sections CGC, EL, IN & MX

Physique générale

Mécanique

Notes rédigées par **Frédéric Mila**

—

Revues et corrigées en collaboration avec
Christophe Galland et Stefano Rusponi

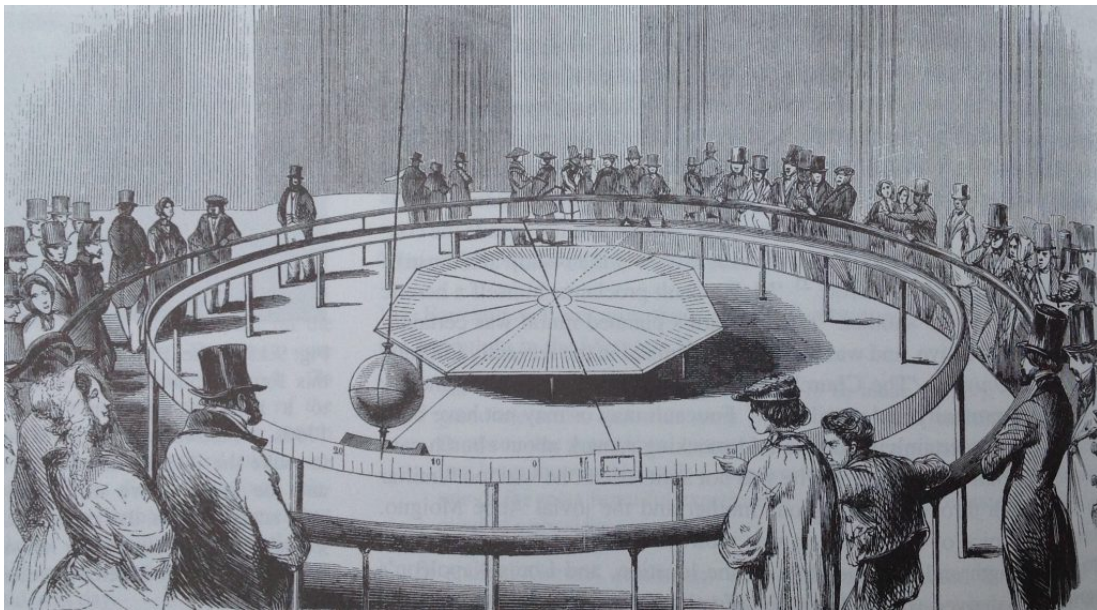


Illustration du pendule de Foucault au Panthéon à Paris

Version du 31 août 2026

Un grand merci à Hugo Cavet pour la première version Latex de ces notes de cours, les illustrations, et les citations en tête de chapitre...

Table des matières

1	Lois de Newton et balistique	3
I.	Introduction	3
II.	Les lois de Newton	4
III.	La balistique	7
IV.	Balistique avec frottement	12
2	Cinématique, coordonnées cylindriques et sphériques	17
I.	Trajectoire, vitesse et accélération	17
II.	Bases en rotation	21
III.	Coordonnées cylindriques	24
IV.	Coordonnées sphériques	26
V.	Coordonnées polaires	29
3	Oscillateur harmonique	31
I.	Ressort, loi de Hooke	31
1.	Position d'équilibre	32
2.	Petites oscillations	32
II.	Le pendule	34
III.	Oscillations amorties	35
1.	Régime supercritique	36
2.	Régime critique	36
3.	Régime sous-critique	37
IV.	Oscillations forcées, résonance	39
4	Forces, travail et énergie	41
I.	Les différents types de force	41
1.	Interaction à distance entre particules	41
2.	Forces de rappel	41
3.	Forces de contact avec un solide	42
4.	Forces de liaison	43
5.	Forces exercées par un fluide	43
II.	Impulsion, puissance, travail	44
1.	Impulsion	44
2.	Puissance	45
3.	Travail	45
III.	Forces conservatives, énergie potentielle	47
IV.	Équilibres stables et instables	51
V.	Frottements et théorème de l'énergie	56

5	Moment cinétique et force centrale, gravitation	57
I.	Moment cinétique	57
II.	Mouvement à force centrale	58
III.	Solution générale du mouvement à force centrale dérivant de $V(r)$. .	59
IV.	Problème de Kepler	60
V.	Les lois de Kepler	62
6	Changement de référentiel, dynamique terrestre	66
I.	Référentiels et repères	66
II.	Changement de référentiel	66
III.	Principe fondamental dans un référentiel quelconque	68
IV.	Référentiels en translation non uniforme	69
1.	Ressort dans un ascenseur	69
2.	Pendule dans un train	70
3.	Pendule dans un train sur un plan incliné	71
4.	Accéléromètre à main	72
V.	Référentiels en rotation uniforme	72
1.	Liquide en rotation	72
2.	Fusil tournant	73
VI.	Dynamique terrestre	74
1.	Déviations vers l'est	75
2.	Pendule de Foucault	76
7	Système de points matériels	78
I.	Forces intérieures et forces extérieures	78
II.	Statique	80
III.	Systèmes isolés	81
IV.	Centre de masse	83
1.	Référentiel du centre de masse	85
V.	Problème à deux corps	85
VI.	Collisions	87
1.	Choc élastique	88
2.	Choc inélastique	90
8	Solides indéformables	92
I.	Introduction	92
II.	Cinématique	93
1.	Solides en contact	95
2.	Mouvement plan sur plan	96
III.	Théorèmes relatifs au moment cinétique et à l'énergie cinétique . . .	98
IV.	Calcul du moment cinétique	101
1.	Cas particulier : point fixe ou centre de masse	101
2.	Cas général	103
3.	Moment d'inertie par rapport à un axe	103
4.	Théorème de Huygens-Steiner	104
5.	Rotation autour d'un axe quelconque	105
6.	Symétries	105
V.	Énergie cinétique	107
VI.	Roulement sans glissement	108
1.	Cylindre sur plan incliné	108
2.	Meule	112
VII.	Rotation autour d'un axe fixe	114
1.	Pendule physique	114
2.	Pendule tournant	115

VIII. Mouvement autour d'un point fixe	117
1. Équations d'Euler (complément)	117
2. Gyroscope	119
3. Effets gyroscopiques	120
4. Toupie	122

Avant-propos

La mécanique est l'étude du mouvement d'objets massifs soumis à des forces. L'énoncé par Newton en 1666 des lois fondamentales de la mécanique marque à la fois le début de la physique moderne et le début des mathématiques modernes. En effet, Newton a dû développer le calcul différentiel pour formuler correctement le principe fondamental.

C'est donc très naturellement à l'occasion d'un premier cours de mécanique que l'on rencontre un certain nombre de concepts mathématiques. Ces concepts sont développés dans les cours d'algèbre et d'analyse, mais on en a tout de suite besoin. Comment faire ? Commencer par un bref cours de mathématiques ?

Dans ces notes de cours, j'ai décidé d'opter pour une autre approche. On va étudier des problèmes de plus en plus complexes, et on introduira au fur et à mesure les notions mathématiques nécessaires. Elles seront regroupées dans des appendices auxquels on pourra se référer tout au long du semestre.

Complément (*les éléments indiqués en complément ne sont pas exigés à l'examen*). Le domaine d'application de la mécanique newtonienne est vaste, mais pas infini. Il est limité aux phénomènes qui impliquent des vitesses beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière $c \simeq 300\,000\text{ km/s}$. Lorsque l'on approche de ces vitesses, la théorie de Newton doit être modifiée : c'est la théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905). Lorsque le champ gravitationnel est très intense, la relativité générale doit être utilisée (Einstein, 1917). Par ailleurs, si l'on s'intéresse à des objets très petits (atomes, particules, ...), la théorie doit être remplacée par la mécanique quantique (Heisenberg, 1926) qui associe à chaque système une fonction d'onde dont l'évolution dans le temps, gouvernée par l'équation de Schrödinger, permet de prédire la probabilité d'obtenir un certain résultat de mesure. A noter que pour l'instant il n'existe pas de théorie quantique unifiée avec la relativité générale.

Pendant ces deux siècles et demi de règne sans partage, la mécanique a été utilisée pour comprendre des phénomènes de plus en plus complexes : la balistique (le mouvement des corps dans le champ de gravitation de la Terre), le mouvement d'objets soumis à des forces supplémentaires (ressort, pendule, ...), le mouvement des planètes autour du Soleil, le mouvement d'objets en interaction, le mouvement des corps solides, *etc.* Dans ce cours, nous allons étudier un certain nombre de ces phénomènes par complexité croissante, en partant comme il se doit des lois de Newton et de la balistique (qui concerne l'étude du mouvement des projectiles, mot issue du grec "*ballein*" : lancer, jeter).

Lois de Newton et balistique

« *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.* »

— Isaac Newton

I. Introduction

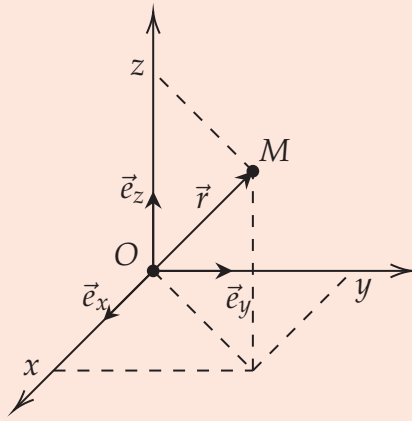
Les objets étudiés en mécanique sont caractérisés avant tout par leur masse m , mais ils ont toujours une certaine extension dans l'espace (bille, dé, ...). Dans beaucoup de circonstances, la taille et la forme précise de ces objets sont sans importance, et le mouvement peut être décrit par la position d'un point de référence, par exemple son centre pour une bille. Ceci conduit au concept de **point matériel**, un objet de masse m et d'extension nulle. Cette approximation consiste à ignorer la possibilité pour un objet de tourner sur lui-même et décrit de façon rigoureuse le déplacement du centre de masse considéré comme un point matériel de masse m . Nous y reviendrons lors de l'étude du mouvement des solides.

La position d'un point matériel est repérée par un point M dans l'espace à trois dimensions. La description de son mouvement ne fait de sens que par rapport à un certain **référentiel**.

Définition (Référentiel). Un référentiel est défini par un ensemble de quatre points non coplanaires dont les positions relatives ne bougent pas au cours du temps.

Une fois le référentiel choisi (par exemple un solide lui-même fixé au sol), l'espace peut-être doté d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à ce référentiel (c'est à dire fixe dans ce référentiel).

Définition (Vecteur position). À tout point M , on peut associer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. On notera souvent ce vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.



Les coordonnées du point M dans ce repère sont définies par les composantes du vecteur $\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$$

Ces composantes (x, y, z) sont obtenues en projetant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur chacun des vecteurs de base, par exemple :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x = x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = x.$$

où l'on a utilisé la distributivité du produit scalaire sur l'addition puis l'orthogonalité de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Lorsqu'un point matériel est en interaction avec son entourage, sa position évolue au cours du temps. Cette évolution est donc naturellement décrite par une fonction $M(t)$ qui à chaque instant t associe un point de l'espace, ou de façon équivalente par un vecteur $\vec{r}(t)$. Le but de la mécanique est de calculer $\vec{r}(t)$ dans différentes circonstances. Cette fonction est parfois appelée **équation horaire**. La trajectoire du point M entre deux instant t_1 et t_2 est formée par l'ensemble des points $M(t)$ (ou des vecteurs $\vec{r}(t)$) pour $t \in [t_1, t_2]$.

II. Les lois de Newton

Pour formuler les lois de Newton, il est utile d'introduire les dérivées par rapport au temps du vecteur position.

Définition (Vecteur vitesse). Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Comme $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ et que les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes dans le référentiel choisi ($\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$), on a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z + z \frac{d\vec{e}_z}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

En mathématiques, il est usuel de noter la dérivée d'une fonction $f(t)$ par $f'(t)$. En mécanique (et d'autres branches de la physique), la dérivée *par rapport au temps*

est notée avec un point au-dessus de la lettre désignant la fonction :

$$\frac{dx}{dt}(t) \equiv \dot{x}(t), \quad \frac{dy}{dt}(t) \equiv \dot{y}(t), \quad \frac{dz}{dt}(t) \equiv \dot{z}(t),$$

et pour un vecteur

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t).$$

Ainsi, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z$.

Définition (Vecteur accélération). Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, on a

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

d'où, en utilisant de nouveau que les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes dans le référentiel choisi,

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z.$$

De même que l'on note les dérivées premières avec un point, on note les dérivées secondes par rapport au temps avec deux points :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \equiv \ddot{x}(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2}(t) \equiv \ddot{y}(t), \quad \frac{d^2z}{dt^2}(t) \equiv \ddot{z}(t), \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t).$$

Ainsi, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z$.

Enfin, un point matériel n'est pas simplement caractérisé par sa position, mais également par sa masse m . La formulation de nombreuses propriétés se fait de façon plus compacte en termes du vecteur **quantité de mouvement**.

Définition (Quantité de mouvement). La quantité de mouvement est le produit de la vitesse par la masse :

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$

En 1666, Newton a rationalisé de nombreuses observations à l'aide de trois lois.

Loi 1 (1^{re} loi de Newton, Principe d'inertie). Un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v} = \text{cte}$).

Loi 2 (2^e loi de Newton, Principe fondamental de la dynamique). Si, du fait de ses interactions avec l'extérieur, un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$, son mouvement est régi par l'équation

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Si sa masse est constante, cette équation prend la forme

$$\vec{F} = m \vec{a}.$$

Loi 3 (3^e loi de Newton, Principe d'action et réaction). Si un corps 1 exerce sur un corps 2 une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, le corps 2 exerce sur le corps 1 une force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ qui lui est opposée :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Ces lois appellent de nombreux commentaires. En réalité, une bonne partie du cours va consister à donner un sens précis à ces lois.

La première loi se base sur l'observation qu'un objet posé sur une table parfaitement horizontale ne bouge pas, et que si on lui donne une impulsion sa vitesse sera constante si les frottements sont négligeables. Elle sous-entend que si l'on prend la Terre comme référence, cette loi est valable. Or, comme nous le verrons, ce n'est pas rigoureusement vrai. Si l'on prend le Soleil comme référence, la Terre tourne autour du Soleil et sur elle-même. La première loi s'appliquera de façon plus précise dans un référentiel lié au Soleil (quoique non rigoureuse car le système solaire tourne lui-même autour du centre de notre galaxie, la voie lactée...).

Il y aura donc en général des corrections à apporter à la première loi si l'on se place dans un référentiel lié à la Terre, corrections d'autant plus grandes que le temps d'observation d'un phénomène est grand et devient comparable à la période de rotation de 23h 56min (jour sidéral). Par conséquent, la première loi de Newton peut être comprise comme la définition d'un **référentiel inertiel** ou **galiléen**, c'est-à-dire un référentiel où elle s'applique. Pour des expériences typiquement effectuées en auditoire sur des durées de quelques secondes ou minutes, le référentiel terrestre peut-être considéré comme galiléen. Nous verrons plus tard comment les autres lois sont modifiées lorsque l'on passe dans un référentiel non-inertiel (ou non-galiléen).

Dans la deuxième loi, la force $\vec{F}$ est la résultante, c'est-à-dire la somme *vectorielle*, de toutes les forces auxquelles le point matériel est soumis. Par exemple, un objet posé sur une table est soumis à son poids et à la réaction de la table. La somme des deux s'annule, et il ne bouge pas (ou continue en mouvement rectiligne uniforme s'il possède une vitesse initiale non nulle par rapport à la table). Déterminer les forces auxquelles un point matériel est soumis est une partie importante du problème à résoudre. Par ailleurs, cette loi est formulée comme une **équation différentielle**, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir des dérivées de cette fonction. C'est particulièrement clair pour un point matériel de masse m constante puisque cette loi se réécrit

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

ou encore, en posant $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}.$$

Les forces peuvent elles-mêmes dépendre de la position, de la vitesse et du temps, ce qui conduit à un système de trois équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{x} \\ F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{y} \\ F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{z} \end{cases}.$$

Une bonne partie du cours va consister à formuler ces équations différentielles, puis à les résoudre.

Notons enfin que cette loi, d'abord formulée pour calculer $\vec{r}(t)$ connaissant $\vec{F}$, peut aussi être utilisée pour calculer $\vec{F}$ connaissant $\vec{r}(t)$. Par exemple, si une bille tourne dans un rail circulaire à vitesse constante, on peut calculer son accélération et en déduire $\vec{F}$, qui contient notamment la réaction du rail sur la bille.

Enfin, la troisième loi de Newton, qui est essentielle pour démontrer la conservation de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total d'un système isolé (voir chapitre 7), est toujours valable pour la gravitation, mais pas pour les particules chargées en mouvement.

Complément (la troisième loi et l'électromagnétisme). Pour un système de particules chargées en mouvement, les forces électromagnétiques, et notamment la force de Lorentz, peuvent violer la troisième loi. Il s'en suit qu'un tel système, même isolé du reste de l'univers, peut se mettre en mouvement de translation ou de rotation 'spontanément'. En réalité, les conservations de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total sont bien satisfaites si on tient compte du rayonnement électromagnétique émis par le système de charges en mouvement. Ce rayonnement transporte en effet sa propre quantité de mouvement (causant la pression de radiation) et son propre moment cinétique.

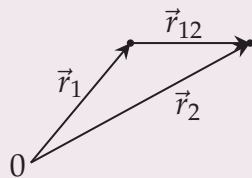
III. La balistique

La balistique est l'étude du mouvement de projectiles massifs dans le champ de pesanteur terrestre. Le champ de pesanteur est une conséquence de la **gravitation universelle**.

Loi (Gravitation). Deux objets de masse m_1 et m_2 sont attirés par une force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$\|\vec{F}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

où $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle. Si l'on pose $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, de telle sorte que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$, la force exercée par m_2 sur m_1 est



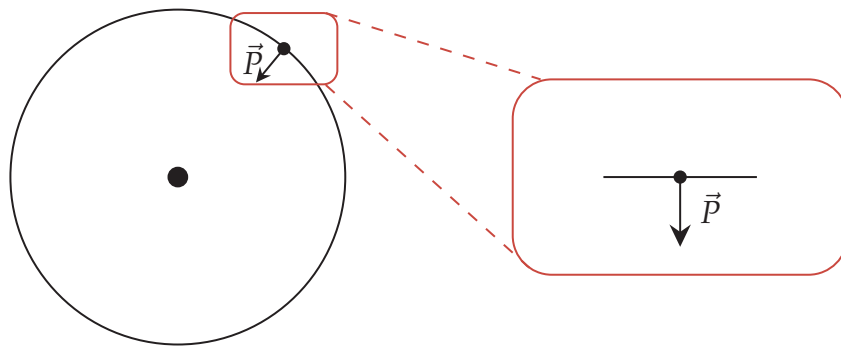
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|},$$

et, d'après le principe d'action et réaction,

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}.$$

À la surface de la Terre, on peut considérer que $r_{12} \simeq R$, le rayon de la Terre. Par ailleurs, pour tous les problèmes qui font intervenir de petites distances par rapport au rayon de la Terre, on peut se placer dans le plan tangent et remplacer cette force, qui va vers le centre de la Terre, par une force verticale.¹

1. Pour obtenir le champ de pesanteur exact, il faut aussi prendre en compte une contribution additionnelle due à la force centrifuge qui sera traitée au chapitre 6, de sorte que la verticale ne passe en générale pas par le centre de masse de la Terre, sauf aux pôles et le long de l'équateur.



La norme de la force exercée par la Terre sur un objet de masse m vaut

$$\|\vec{F}\| = \frac{GM}{R^2} m.$$

On l'écrit en général en introduisant $g = \frac{GM}{R^2}$ sous la forme :

$$\vec{P} = m \vec{g},$$

où $\vec{g}$ est un vecteur vertical de norme g et où la force, appelée **poids**, est notée $\vec{P}$. g a la dimension d'une accélération et elle vaut $g \simeq 9,8 \text{ m s}^{-2}$ (parfois approximé par 10 m s^{-2} pour des calculs d'ordre de grandeur).

Si l'on choisit un système de coordonnées où $\vec{e}_z$ est vertical ascendant, le poids est donc donné par

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z.$$

Si un point matériel n'est soumis qu'à l'action du poids, les équations différentielles qui régissent son mouvement sont donc

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}.$$

La solution générale de l'équation $\ddot{x} = 0$ est $x(t) = at + b$ avec a et b des constantes.

Vérification. $x(t) = at + b \implies \dot{x}(t) = a \implies \ddot{x}(t) = 0$.

Preuve. De façon générale, la solution d'une équation différentielle du type

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t)$$

est donnée par $x(t) = F(t) + a$, où $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, c'est-à-dire une fonction qui satisfait $\frac{dF}{dt} = f$. Appliquons cette règle deux fois de suite.

1. $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 + a$ car $F(t) = 0$ est une primitive de $f(t) = 0$.
2. $\dot{x} = a \Rightarrow x(t) = at + b$ car $F(t) = at$ est une primitive de $f(t) = a$.

De même, la solution générale de l'équation $\ddot{z} = -g$ est $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$.

Vérification. $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b \implies \dot{z}(t) = -gt + a \implies \ddot{z} = -g$.

Preuve.

1. $\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + a$ car $F(t) = -gt$ est une primitive de $f(t) = -g$.

2. $\dot{z}(t) = -gt + a \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ car $F(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at$ est une primitive de $f(t) = -gt + a$.

Finalement, la solution générale du problème fait intervenir six constantes d'intégration, deux par composantes. On peut les repérer par des indices et écrire

$$\begin{cases} x(t) = a_x t + b_x \\ y(t) = a_y t + b_y \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a_z t + b_z \end{cases}.$$

Ces constantes d'intégration sont fixées par les conditions initiales, c'est-à-dire par la position et la vitesse du point matériel. Dénotons les par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Par définition, $x(t=0) = x_0$. Mais $x(t=0) = a_x \times 0 + b_x = b_x$ donc $b_x = x_0$. De même, $\dot{x}(t=0) = v_{0x}$. Mais $\dot{x}(t=0) = a_x$ donc $a_x = v_{0x}$. Ainsi,

$$x(t) = v_{0x}t + x_0.$$

De même,

$$y(t) = v_{0y}t + y_0.$$

Enfin, $z(t=0) = b_z$ et $\dot{z}(t=0) = -g \times 0 + a_z = a_z$, d'où

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0.$$

Ces équations sont la solution générale du problème d'un point matériel dans le champ de pesanteur sans frottement ni autres forces.

Remarques.

- Les mouvements dans les trois directions sont indépendants les uns des autres.
- La solution est indépendante de la masse! Un objet léger et un objet lourd tombent à la même vitesse. C'est vrai tant que l'on peut négliger les frottements, donc en particulier dans le vide.

Exemples d'utilisation.

1. **Chute d'un objet** : si on lâche un objet sans vitesse initiale d'une hauteur h , son mouvement est donné par

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Il touche le sol au bout d'un temps donné par

$$\begin{aligned} z(t) = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + h = 0 \\ &\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'on mesure le temps t , on en déduit la hauteur

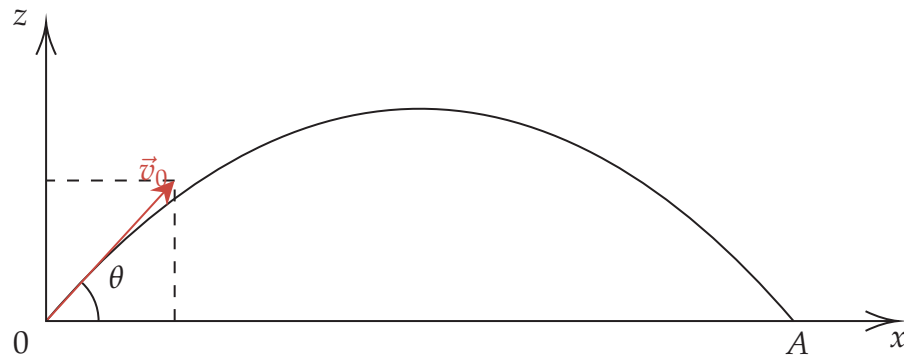
$$h = \frac{1}{2}gt^2.$$

Application : une falaise surplombe une rivière. On lâche un caillou qui met deux secondes à toucher l'eau. Quelle est la hauteur de cette falaise?

Réponse : $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9,8 \times 4 = 19,6 \text{ m}.$

2. **Trajectoire d'un projectile** : on lance un projectile depuis l'origine avec une vitesse dans le plan (xz) donnée par

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0z} = v_0 \sin \theta.$$



On se propose de déterminer :

- la forme de la trajectoire;
- le temps de vol;
- le point d'impact A ;
- la hauteur maximale;
- l'angle θ qui maximise la portée.

Solution : les équations horaires sont

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos \theta t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t \end{cases}.$$

- a) De la première équation, on tire

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}.$$

De la troisième, on tire

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \frac{v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} x,$$

soit

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x.$$

C'est l'équation d'une **parabole**. Le mouvement a lieu dans le plan (xz) puisque $y(t) = 0$.

- b) Le temps de vol correspond au temps $t > 0$ tel que $z(t) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t &= 0 \\ v_0 \sin \theta t &= \frac{1}{2}gt^2 \\ t_{\text{vol}} &= \frac{2v_0 \sin \theta}{g}. \end{aligned}$$

- c) Le point A est atteint lorsque t est égal au temps de vol, d'où :

$$x(t) = v_0 \cos \theta t = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g},$$

soit donc finalement

$$x_A = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g}, \quad \text{et bien sûr } z_A = 0.$$

On peut aussi déterminer directement x_A en résolvant l'équation de la trajectoire pour $z = 0$, soit :

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x,$$

ce qui conduit bien sûr au même résultat.

- d) La hauteur maximale peut être calculée comme le maximum de $z(x)$. Ce maximum satisfait

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = 0 &\implies -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta = 0 \\ \implies x &= v_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta \frac{1}{g} = v_0^2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{g}. \end{aligned}$$

C'est le milieu de la trajectoire. z vaut alors

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \frac{v_0^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{g^2} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} v_0^2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{g},$$

soit

$$z_{\max} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2 \theta}{g}.$$

On peut aussi le trouver en écrivant que c'est le temps t où la vitesse verticale s'annule :

$$\dot{z}(t) = 0 \implies -gt + v_0 \sin \theta = 0 \implies t = \frac{v_0 \sin \theta}{g},$$

qui nous donne le même résultat :

$$z_{\max} = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} + v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2 \theta}{g}.$$

Vérification : z [m], v_0 [m s^{-1}], g [m s^{-2}].

- e) Nous avons vu que la portée est donnée par

$$x_A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta.$$

Dérivons par rapport à l'angle :

$$\frac{dx_A}{d\theta} = 0 \implies \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

La portée est maximale pour $\theta = 45^\circ$.

IV. Balistique avec frottement

La trajectoire d'un objet de taille non négligeable peut encore être déterminée en le considérant comme un point matériel, mais à condition de prendre en compte la résistance de l'air. Cette résistance crée une force effective opposée au mouvement, et qui doit augmenter avec la vitesse et s'annuler lorsque la vitesse est nulle. Un modèle simple conduit à inclure dans le problème une force supplémentaire $\vec{F}_r = -b \vec{v}$, proportionnelle à la vitesse (force de frottement fluide en régime laminaire).

La deuxième loi de Newton reste valable, mais à condition de prendre pour la force $\vec{F}$ la **résultante** du poids et de la force de résistance, c'est-à-dire

$$\vec{F} = \vec{P} - b \vec{v} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} F_x = -bv_x = -b\dot{x} \\ F_y = -bv_y = -b\dot{y} \\ F_z = -mg - b\dot{z} \end{cases}.$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -b\dot{x} \\ m \ddot{y} = -b\dot{y} \\ m \ddot{z} = -b\dot{z} - mg \end{cases}$$

Commençons par résoudre la première équation :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \implies \quad \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\frac{b}{m}.$$

Mais on sait que la dérivée du logarithme d'une fonction u est donnée par

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Ainsi, $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{d}{dt} [\ln \dot{x}]$ puisque $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$. L'équation différentielle est donc de la forme

$$\frac{d}{dt} [\ln \dot{x}] = -\frac{b}{m},$$

donc

$$\ln \dot{x} = -\frac{b}{m} t + a,$$

avec a une constante, puisque $F(t) = -\frac{b}{m} t$ est une primitive de $f(t) = -\frac{b}{m}$. En prenant l'exponentielle des deux membres, il vient

$$\exp(\ln \dot{x}) = \exp\left(-\frac{b}{m} t\right) \exp(a) \quad \implies \quad \dot{x} = e^a \exp\left(-\frac{b}{m} t\right).$$

ou encore

$$\dot{x} = d \exp\left(-\frac{b}{m} t\right),$$

où d est une constante. Si on appelle v_{0x} la vitesse initiale à l'instant $t = 0$, on a :

$$d \exp\left(-\frac{b}{m} \times 0\right) = v_{0x} \quad \implies \quad v_{0x} = d.$$

Ainsi,

$$\dot{x} = v_{0x} \exp\left(-\frac{b}{m} t\right),$$

ou encore, en introduisant la notation

$$\tau = \frac{m}{b},$$

où τ est une constante ayant la dimension d'un temps,

$$\dot{x} = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La vitesse dans la direction de x est réduite exponentiellement au cours du temps avec un temps caractéristique $\tau = \frac{m}{b}$.

Pour trouver $x(t)$, il suffit de trouver une primitive du membre de droite. Or, comme $\frac{d}{dt} [\exp(at)] = a \exp(at)$, une primitive de $v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ est donnée par $F(t) = v_{0x}(-\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, donc

$$x(t) = -\tau v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c,$$

avec c une constante. Si à l'instant $t = 0$, le point est en $x = 0$, la constante c est donnée par

$$0 = -\tau v_{0x} + c \implies c = \tau v_{0x}.$$

On en déduit que

$$x(t) = v_{0x} \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

De même,

$$y(t) = v_{0y} \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

Et si l'objet est lancé avec une vitesse initiale dans le plan (xz) , $v_{0y} = 0$ et $y(t) = 0$: le mouvement a lieu dans le plan (xz) .

Passons à l'équation différentielle en z . Elle est donnée par

$$m\ddot{z} = -bz - mg,$$

ou encore

$$m\ddot{z} + bz = -mg.$$

Résolution par changement de variable.

On peut faire un changement de fonction inconnue pour faire disparaître le second membre. Posons en effet

$$u(t) = z(t) + at \implies \dot{u} = \dot{z} + a \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{z}.$$

L'équation se réécrit

$$m\ddot{u} + b\dot{u} - ba = -mg.$$

Si on choisit $a = \frac{mg}{b} = \tau g$, u satisfait l'équation différentielle :

$$m\ddot{u} + b\dot{u} = 0.$$

C'est de nouveau la même équation différentielle que pour x , et la solution générale est

$$\dot{u}(t) = d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad u(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c,$$

donc

$$\begin{aligned} z(t) &= u(t) - at \\ &= -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t. \end{aligned}$$

Complément (Méthode alternative). Vous verrez en mathématiques que la solution générale d'une équation différentielle non homogène (avec second membre) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Vérification. Si

$$m\ddot{f} + b\dot{f} = 0$$

et

$$m\ddot{g} + b\dot{g} = -mg,$$

alors

$$m(\ddot{f} + \ddot{g}) + b(\dot{f} + \dot{g}) = -mg.$$

Mais $\ddot{f} + \ddot{g}$ est la dérivée seconde de $f + g$, et $\dot{f} + \dot{g}$ est la dérivée première de $f + g$. Autrement dit, $f + g$ est solution de l'équation avec second membre. Si on additionne la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière de l'équation avec second membre, on obtient la solution générale de l'équation avec second membre.

L'équation sans second membre s'écrit

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = 0.$$

C'est la même équation que pour x , et la solution générale est donnée par

$$\dot{z} = e^a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

avec a une constante, ou encore

$$\dot{z} = d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

où d est toujours une constante. Une primitive du membre de droite est donnée par $F(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et la solution générale est de la forme

$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c,$$

où c et d sont des constantes. L'équation avec second membre admet une solution particulière très simple :

$$\dot{z} = -\frac{m}{b} g \implies z(t) = -\frac{m}{b} g t = -g\tau t.$$

La solution générale est donc de la forme

$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t.$$

Les constantes d'intégration c et d peuvent être fixées par les conditions initiales.

$$1. \quad z(t=0) = z_0 \implies -\tau d + c = z_0.$$

2. $\dot{z}(t=0) = v_{0z} = d - g\tau :$

$$\begin{cases} d = v_{0z} + g\tau \\ c = z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 \end{cases} .$$

Finalement,

$$z(t) = z_0 - (v_{0z}\tau + g\tau^2) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t$$

ou encore

$$z(t) = z_0 + (v_{0z}\tau + g\tau^2) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - g\tau t .$$

Remarques.

- Le mouvement dépend de m dans ce cas via $\tau = \frac{m}{b}$.
- La vitesse verticale est donnée par

$$\dot{z}(t) = (v_{0z} + g\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau .$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, elle n'augmente pas indéfiniment, mais elle sature à la valeur $-g\tau$.

Complément (limite sans frottement). Dans la limite sans frottement, $\tau \rightarrow +\infty$ et $\frac{t}{\tau} \rightarrow 0$. On peut faire un développement limité de l'exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2} + \dots ,$$

et on arrive à

$$\begin{aligned} z(t) &\simeq z_0 + (v_{0z}\tau + g\tau^2) \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2} + \dots\right) - g\tau t \\ &= z_0 + v_{0z}t - \underbrace{v_{0z} \frac{t^2}{\tau}}_{0 \text{ quand } \tau \rightarrow +\infty} + g\tau t - \frac{1}{2} g t^2 - g\tau t \\ &= z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2} g t^2 . \end{aligned}$$

C'est bien la solution du cas sans frottement.

Complément (trajectoire avec frottements). Lorsque $t \rightarrow +\infty$,

$$x(t) = v_{0x}\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \rightarrow v_{0x}\tau$$

et

$$z(t) \simeq z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t \rightarrow -\infty .$$

La trajectoire doit donc avoir une asymptote verticale en $x = v_{0x}\tau$.

On peut trouver la forme explicite de la trajectoire. En effet,

$$x(t) = v_{0x}\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

peut s'inverser pour trouver t en fonction de x :

$$x = v_{0x}\tau - v_{0x}\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}$$

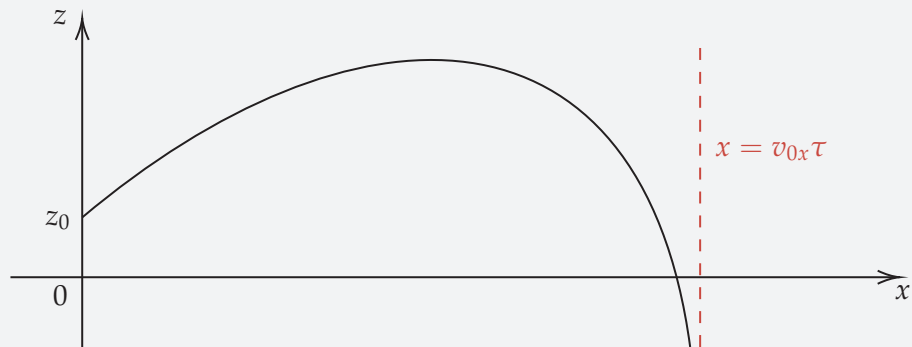
$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right).$$

En injectant dans $z(t)$, on obtient

$$z(t) = z_0 + \underbrace{(v_{0z}\tau + g\tau^2)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}_{\frac{x(t)}{v_{0x}\tau}} - g\tau t,$$

soit donc finalement

$$z(x) = z_0 + \frac{v_{0z} + g\tau}{v_{0x}} x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right).$$

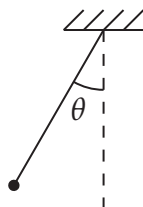


Cinématique, coordonnées cylindriques et sphériques

« Le temps et l'espace ne sont pas des conditions dans lesquelles nous vivons, mais des modes par lesquels nous pensons. »

— Albert Einstein

La **cinématique** a pour objet la description du mouvement indépendamment de ses causes. Dans de nombreuses situations, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus commodes. Prenons l'exemple d'un pendule plan. La position du pendule est repérée très simplement par un seul paramètre, l'angle θ avec la verticale. Par ailleurs, il y a des axes privilégiés (tangents et perpendiculaires à la trajectoire) par rapport auxquels la vitesse et l'accélération prennent des formes plus intuitives, donc plus commodes.



I. Trajectoire, vitesse et accélération

Définition (Trajectoire). La courbe décrite par la position $M(t)$ au cours du temps s'appelle la trajectoire.

Si l'on a choisi une origine O pour un repère, elle correspond à l'extrémité du vecteur $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. La vitesse est définie par la dérivée de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t).$$

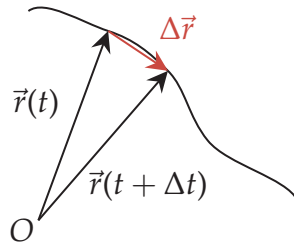
Proposition 1. La vitesse est toujours **tangente** à la trajectoire.

Justification. Repartons de la définition de la vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

et posons

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$



Si le temps Δt est suffisamment petit, le vecteur $\Delta \vec{r}$ se confond avec une portion de trajectoire et il devient tangent à la trajectoire.

À partir de cette propriété, il est commode d'introduire un certain nombre de grandeurs annexes.

- Le **vecteur unitaire tangent** $\vec{\tau}(t)$. Il est colinéaire et de même sens que $\vec{v}(t)$, on peut donc l'écrire

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}.$$

- La **vitesse scalaire** $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$. (C'est la quantité affichée comme vitesse sur le compteur d'un véhicule ou sur un GPS).
- L'**abscisse curviligne**. C'est la distance parcourue le long de la trajectoire à partir d'un point de référence. Nous la noterons $s(t)$.

Proposition 2. La dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne est la vitesse scalaire :

$$\frac{ds}{dt} = v(t).$$

Démonstration. On peut écrire le vecteur vitesse comme

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= \vec{\tau} \frac{ds}{dt}, \end{aligned}$$

parce que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt}.$$

Comme

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v},$$

il vient

$$\frac{ds}{dt} = v(t).$$

Intéressons-nous maintenant au vecteur $\vec{\tau}$.

Proposition 3. Si $\vec{\tau}$ n'est pas constant, $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$.

Preuve. Comme $\vec{\tau}$ est unitaire,

$$\|\vec{\tau}(t)\|^2 = \vec{\tau}(t) \cdot \vec{\tau}(t) = 1.$$

Prenons la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \implies 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \implies \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{0} \text{ ou } \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}.$$

Remarque : cette proposition est vraie pour tout vecteur de norme constante, en particulier pour tout vecteur unitaire.

Proposition 4. Si le mouvement est rectiligne, alors $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$.

Preuve. $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire parallèle à la trajectoire. Il ne change pas au cours du temps donc $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$.

Proposition 5. Si la trajectoire est localement tangente à un cercle de rayon R et de même courbure (le cercle osculateur), alors le vecteur $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ est orienté vers le centre de ce cercle, et

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\| = \frac{v(t)}{R}.$$

Preuve. Prenons l'origine O au centre du cercle. Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est suivant un rayon du cercle, et donc $\vec{r}(t) \cdot \vec{\tau}(t) = 0$. Cette équation n'est strictement valable qu'au temps t puisque le cercle change au cours du temps. Mais comme le cercle a la même courbure que la trajectoire, on peut montrer que $\vec{r}(t + \Delta t) \cdot \vec{\tau}(t + \Delta t)$ tend vers 0 plus vite que Δt , et donc que la dérivée par rapport au temps de $\vec{r}(t) \cdot \vec{\tau}(t)$ est égale à 0. Ainsi, il vient :

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{= v(t)} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \implies \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = -v(t) < 0.$$

Comme ce produit scalaire est négatif, $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ est opposé à $\vec{r}(t)$, donc orienté vers le centre du cercle. Par ailleurs, comme $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$, il est colinéaire à $\vec{r}(t)$, et leur produit scalaire est simplement donné par :

$$\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\|\vec{r}\| \left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\| = -R \left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\|.$$

On déduit des deux expressions de $\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ que

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\| = \frac{v(t)}{R}.$$

Si on définit le vecteur unitaire $\vec{n}$ situé dans le plan du cercle tangent, perpendiculaire à $\vec{\tau}$, et pointant vers le centre du cercle tangent, on a donc :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v(t)}{R} \vec{n}.$$

Remarque. Si le mouvement est rigoureusement circulaire, ces propriétés peuvent se déduire très simplement de la forme explicite de $\vec{\tau}$. Si $\vec{e}_x$ est horizontal et $\vec{e}_z$ vertical, on a :

$$\vec{\tau} = \cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z$$

et donc

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}(\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_z).$$

Comme $\frac{d\theta}{dt} > 0$, ce vecteur pointe vers l'origine O , et sa norme est égale à $\frac{d\theta}{dt}$.

Considérons désormais l'**accélération**. Par définition,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Or,

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}(t) \implies \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v(t)\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Le premier terme est tangent à la trajectoire, le deuxième terme est perpendiculaire à la trajectoire. L'accélération se décompose donc naturellement en une composante tangentielle $\vec{a}_t$ et une composante normale $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t),$$

avec

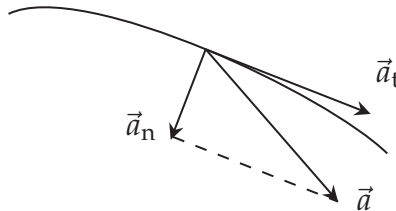
$$\vec{a}_t(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = \dot{v}(t)\vec{\tau} = \dot{s}(t)\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n(t) = v(t)\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{s}(t)\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Pour une trajectoire qui est localement tangente à un cercle, $\vec{a}_n(t)$ est orienté vers le centre du cercle, et

$$\|\vec{a}_n(t)\| = \frac{v(t)^2}{R}.$$

On a donc finalement

$$\boxed{\vec{a}_t = \dot{v}\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$



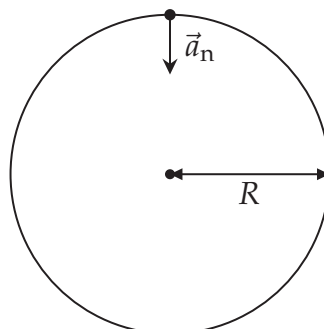
En fonction du rayon de courbure R et de la dérivée de l'angle $\dot{\theta}$, ces expressions prennent la forme

$$\boxed{\vec{a}_t = R\ddot{\theta}\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = R\dot{\theta}^2\vec{n}}$$

Ces expressions sont particulièrement utiles dans le cas d'un mouvement circulaire.

Cas particulier. Si la vitesse $v(t)$ est constante, l'accélération est perpendiculaire à la trajectoire. Prenons l'exemple d'une bille dans un anneau. Si elle tourne à la vitesse v , son accélération est purement normale et égale à

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$



La bille est soumise à une force **centripète** (orientée vers le centre de la trajectoire) de la part de l'anneau. D'après la troisième loi, la bille exerce sur l'anneau une force **centrifuge** (orientée vers l'extérieur). L'intensité de ces forces se calcule aisément :

$$\vec{F} = m \vec{a} \implies \|\vec{F}\| = m a_n = \frac{mv^2}{R}.$$

II. Bases en rotation

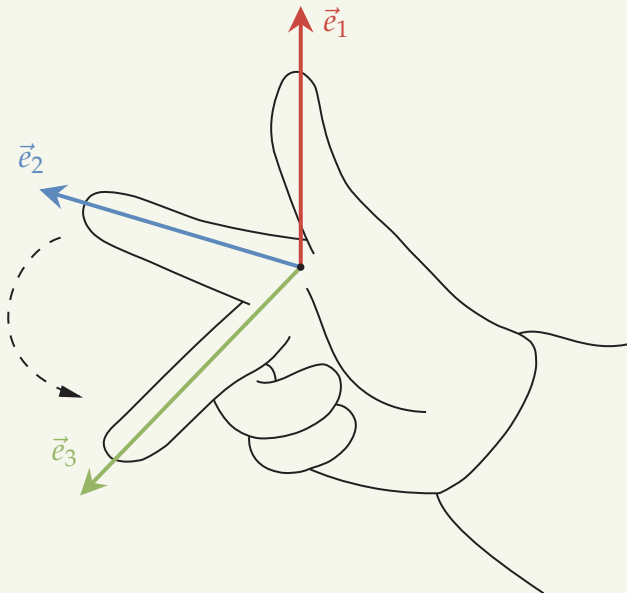
Dans de nombreuses circonstances, il s'avère commode de travailler avec une autre base que la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Par exemple, on pourrait utiliser la base formée par les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{\tau}$, $\vec{e}_2 = \vec{n}$ (si la trajectoire est localement tangente à un cercle), et un troisième vecteur perpendiculaire aux deux autres. Le troisième vecteur est en général choisi comme

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2,$$

où $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Si tel est le cas, le repère est qualifié de **direct** ou **droit**. Pour rappel, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur défini par :

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- sa norme est égale à $ab |\sin \theta|$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- son orientation est définie par la règle de la main droite.

Règle de la main droite. Poing serré, pouce en l'air, si l'on tourne le poing de $\vec{e}_1$ à $\vec{e}_2$, le pouce pointe dans la direction de $\vec{e}_3$. On peut aussi le voir comme la règle du tire-bouchon (si l'on tourne de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$, il s'enfonce vers $\vec{e}_3$), ou avec trois doigts de la main droite comme ci-dessous : si le pouce correspond à $\vec{e}_1$, l'index à $\vec{e}_2$, alors le majeur donne $\vec{e}_3$.



Dans une base orthonormée directe, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de composantes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) est donné par :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel est très utile dans la formulation de nombreuses propriétés physiques, et nous établirons certaines de ses propriétés en cours de route. L'une des plus fondamentales est son **anti-commutativité** :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a},$$

propriété évidente d'après sa définition, et clairement apparente d'après sa forme dans un repère orthonormé direct. Il en découle que

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}.$$

Enfin, on vérifie aisément que

$$\vec{a} \wedge (u\vec{b} + v\vec{c}) = u\vec{a} \wedge \vec{b} + v\vec{a} \wedge \vec{c}.$$

En général, les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ varient au cours du temps. Ce sera par exemple le cas si on choisit $\vec{e}_1 = \vec{r}$. Quelle est la nature de cette variation ? Il s'agit de façon générale d'une **rotation**, un résultat dû à Poisson.

Proposition. Si les vecteurs d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ changent au cours du temps, il existe un vecteur $\vec{\omega}(t)$ tel que

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i.$$

Le mouvement est un mouvement de rotation autour de la direction du vecteur $\vec{\omega}$, de **vitesse angulaire** (ou **vitesse instantanée de rotation**) $\omega = \|\vec{\omega}\|$, et de sens trigonométrique direct quand $\vec{\omega}$ pointe vers le lecteur.

Démonstration. Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment une base, on peut développer les dérivées dans cette base :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = E_{11}\vec{e}_1 + E_{12}\vec{e}_2 + E_{13}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = E_{21}\vec{e}_1 + E_{22}\vec{e}_2 + E_{23}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = E_{31}\vec{e}_1 + E_{32}\vec{e}_2 + E_{33}\vec{e}_3 \end{cases},$$

ou encore, mis sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{e}_1}{dt} \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \implies \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{dt} + \frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_j = 0 \implies E_{ji} + E_{ij} = 0.$$

On déduit que

$$E_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad E_{ij} = -E_{ji}.$$

La matrice E est antisymétrique et de diagonale nulle : elle ne dépend que de trois coefficients indépendants. Écrivons-les comme

$$E_{12} = -E_{21} = \omega_3, \quad E_{13} = -E_{31} = -\omega_2 \quad \text{et} \quad E_{23} = -E_{32} = \omega_1.$$

Avec ces notations, les dérivées s'écrivent

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i, \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3.$$

Vérifions-le :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 \\ &= \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + \omega_3 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\ &= -\omega_2 \vec{e}_3 + \omega_3 \vec{e}_2 = E_{13} \vec{e}_3 + E_{12} \vec{e}_2. \end{aligned}$$

On vérifie aisément les deux autres cas.

Conséquence : Pour tout vecteur $\vec{u}$ lié au repère $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, on a :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}.$$

En effet, $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$ avec u_1, u_2, u_3 indépendants du temps, et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= u_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + u_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + u_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \\ &= u_1 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 + u_2 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 + u_3 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 \\ &= \vec{\omega} \wedge (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}. \end{aligned}$$

Complément (Justification). Pour se convaincre que c'est un mouvement de rotation, considérons le cas où $\vec{\omega}(t)$ est indépendant du temps, et choisissons $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Pour tout vecteur lié au repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}.$$

Posons $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, on a alors

$$\vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{e}_z \wedge (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \omega x \vec{e}_y - \omega y \vec{e}_x.$$

L'équation différentielle $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ conduit au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \\ \dot{z} = 0 \end{cases},$$

qui a pour solution

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\omega t) \\ y = \rho \sin(\omega t) \\ z = \text{cte} \end{cases}$$

puisque

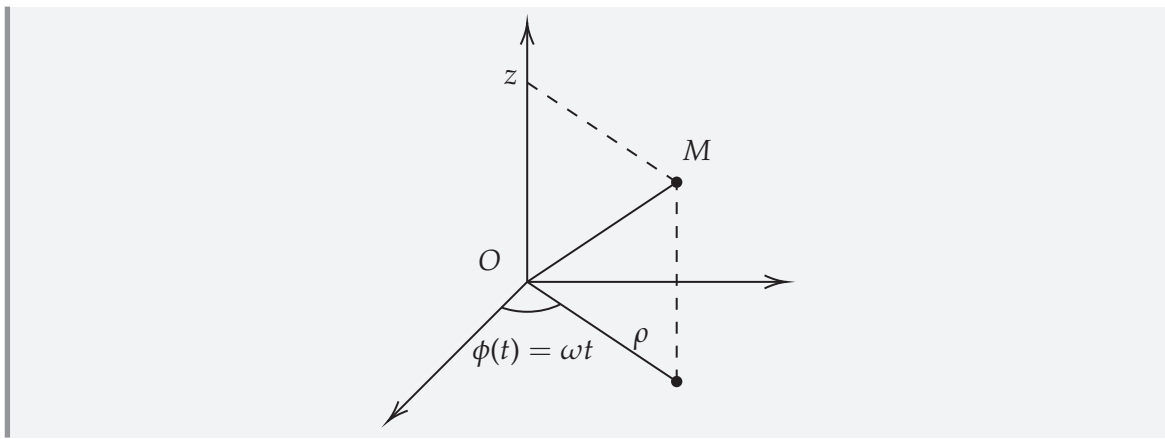
$$\frac{d \cos(\omega t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t).$$

Autrement dit,

$$\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega t) \\ \rho \sin(\omega t) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi(t) \\ \rho \sin \phi(t) \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \omega t.$$

C'est un mouvement de rotation autour de l'axe z de fréquence ω . De façon générale, la fréquence est reliée à ϕ par

$$\omega = \dot{\phi}.$$



III. Coordonnées cylindriques

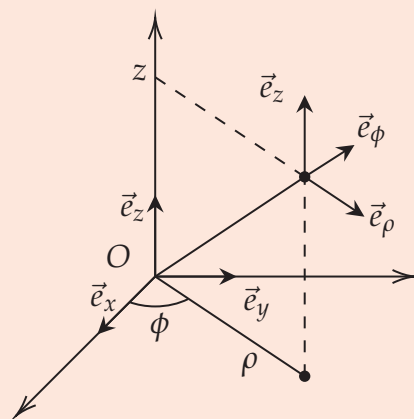
Cet exemple suggère que pour traiter certains problèmes il est plus commode de repérer la position d'un point par les nombres (ρ, ϕ, z) que par les coordonnées cartésiennes. Dans l'exemple précédent, la position est donnée par $\rho = \text{cte}$, $\phi = \omega t$, $z = \text{cte}$. Les coordonnées (ρ, ϕ, z) sont appelées **coordonnées cylindriques**.

Définition (Coordonnées cylindriques). Dans le repère cartésien, la position du point M est donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos \phi \vec{e}_x + \rho \sin \phi \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$$

Pour travailler avec ces coordonnées, il est très utile de changer de repère, et de considérer la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, où les vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_z$ sont tangents aux **lignes de coordonnées**, les lignes obtenues en ne faisant varier qu'une coordonnée. En fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}.$$



Proposition. Le vecteur rotation qui décrit le mouvement de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ par rapport à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z$$

Démonstration. Cette proposition est très intuitive puisque le repère tourne autour de l'axe z , et que cette rotation est contrôlée par l'angle ϕ . Pour la démontrer, on remarque que lorsque le point se déplace dans l'espace, ρ , ϕ et z dépendant

du temps, les vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_z$ dépendent eux aussi du temps :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= -\dot{\phi} \sin \phi \vec{e}_x + \dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_y, \\ \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_x - \dot{\phi} \sin \phi \vec{e}_y, \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Les deux premières équations peuvent se réécrire comme

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi} \vec{e}_\phi \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho.$$

En utilisant les relations $\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi$, qui découlent du fait que la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ est orthonormée, on en déduit aisément que le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z.$$

Dans ce repère, le vecteur position est donné simplement par

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z.$$

On en déduit la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \underbrace{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}}_{\dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\phi} \vec{e}_\phi} + \dot{z} \vec{e}_z + z \underbrace{\frac{d\vec{e}_z}{dt}}_{\dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}},$$

d'où finalement

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z.$$

De même, l'accélération est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \underbrace{\frac{d\vec{e}_\phi}{dt}}_{\dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho} + \ddot{z} \vec{e}_z + \dot{z} \frac{d\vec{e}_z}{dt} \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + (\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{e}_z,\end{aligned}$$

ou encore

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \vec{e}_\phi + \ddot{z} \vec{e}_z.$$

Remarque. Toutes ces expressions ont la bonne dimension !

Exemple d'utilisation. Le pendule

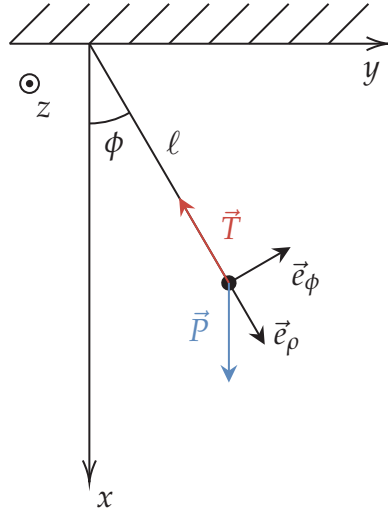
Considérons un pendule contraint à osciller dans un plan vertical perpendiculaire à z (qui est ici choisi selon une direction horizontale). Sa position est entièrement repérée par l'angle ϕ avec la verticale. Cela suggère d'utiliser des coordonnées cylindriques définies par rapport à un repère cartésien où l'axe des x est suivant la verticale descendante, l'axe des y vers la droite, et l'axe des z sort du plan vers le lecteur. Comme $\rho = \ell = \text{cte}$ et $z = 0$, l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = -\ell \dot{\phi}^2 \vec{e}_\rho + \ell \ddot{\phi} \vec{e}_\phi.$$

Le pendule est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_x$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T \vec{e}_\rho$.

Remarque. La tension du fil est un exemple de force de liaison (voir chapitre 4). Elle est dirigée le long du fil et s'adapte au mouvement pour que la bille reste à la distance ℓ du point d'attache du fil. Son intensité n'est pas connue a priori.



Pour trouver l'équation du mouvement, vu que l'intensité de la tension n'est pas connue, le plus simple est de projeter sur $\vec{e}_\phi$ pour l'éliminer :

$$\begin{aligned} mg \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi}_{-\sin \phi} &= m\ell \ddot{\phi} \\ -mg \sin \phi &= m\ell \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle qui ne possède pas de solution simple. Nous verrons dans le prochain chapitre comment la résoudre de façon approximative dans la limite des petites oscillations.

IV. Coordonnées sphériques

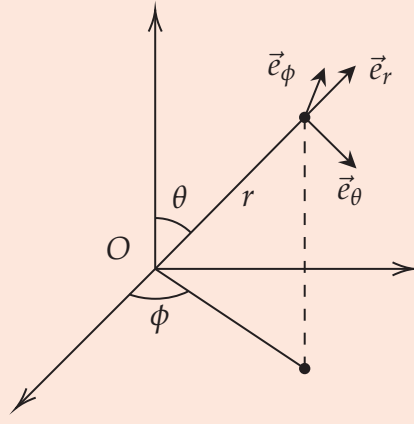
Pour de nombreux problèmes, notamment le mouvement d'un point sur une sphère, il est préférable de repérer la position d'un point par sa distance au centre du repère r et deux angles, θ et ϕ . Les coordonnées (r, θ, ϕ) sont appelées **coordonnées sphériques**.

Définition (Coordonnées sphériques). Dans le repère cartésien, la position du point M est donnée par

$$\overrightarrow{OM} = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z.$$

Les vecteurs qui forment le repère naturel dans ce système de coordonnées sont donnés par

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases}.$$



Remarque. Le vecteur $\vec{e}_\phi$ est le même en coordonnées cylindriques et sphériques. Une façon simple de visualiser les vecteurs en coordonnées sphériques est de partir des coordonnées cylindriques, et de voir $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ comme le résultat d'une rotation de $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_\rho$ d'angle θ autour de $\vec{e}_\phi$.

Proposition. Le vecteur rotation qui décrit le mouvement de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ par rapport à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \vec{e}_z$$

Démonstration. Comme pour les coordonnées cylindriques, cette forme est très intuitive puisqu'elle décrit une rotation autour de $\vec{e}_\phi$ à la vitesse $\dot{\theta}$ et une rotation autour de $\vec{e}_z$ à la vitesse $\dot{\phi}$. Pour démontrer la proposition, on remarque que, si θ et ϕ dépendent du temps, les dérivées des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= (\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \vec{e}_x + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \vec{e}_y - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z \\ &= \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= (-\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) \vec{e}_x + (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi) \vec{e}_y - \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_z \\ &= -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_x - \dot{\phi} \sin \phi \vec{e}_y \\ &= -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur rotation de cette évolution temporelle est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\phi,$$

ce qui peut se réécrire

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \vec{e}_z,$$

forme sous laquelle on voit qu'il correspond effectivement à une rotation autour de $\vec{e}_\phi$ à la vitesse $\dot{\theta}$ et une rotation autour de $\vec{e}_z$ à la vitesse $\dot{\phi}$.

Dans ce repère, le point M est simplement repéré par

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r,$$

d'où l'on tire pour la vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi,$$

et pour l'accélération

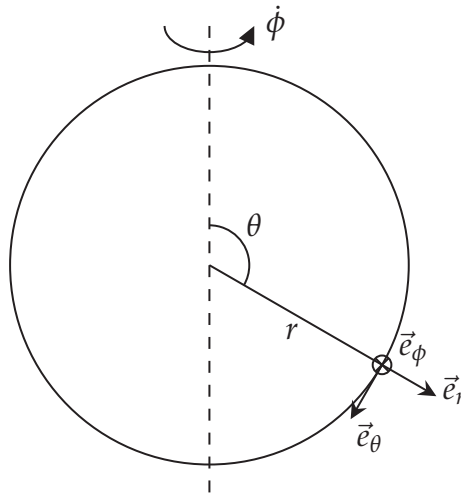
$$\begin{aligned}\vec{a} = & \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi + (\dot{r} \ddot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi) \\ & + (\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + r \ddot{\phi} \sin \theta + r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\phi + r \dot{\phi} \sin \theta (-\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta),\end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = & (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta \\ & + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\phi.\end{aligned}}$$

Exemple d'utilisation. Masse sur un cerceau tournant

On considère une bille astreinte à se déplacer sur un cerceau de rayon r tournant à la vitesse $\dot{\phi}$ autour d'un diamètre vertical. La position de la bille est entièrement déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Vu que l'autre degré de liberté est l'angle ϕ du cerceau autour de son diamètre, cela suggère d'utiliser des coordonnées sphériques.

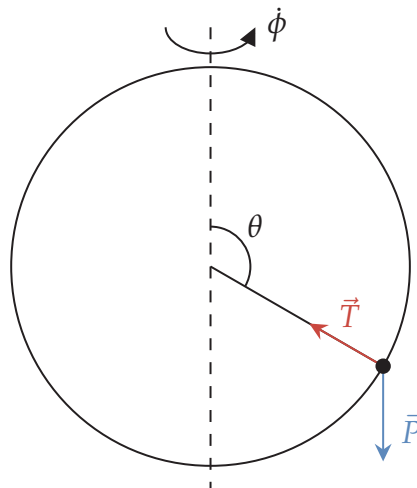


On se propose de calculer l'angle θ en fonction de ϕ , en supposant que la bille glisse sans frottement, ce qui implique que la réaction de l'anneau est perpendiculaire à l'anneau (voir chapitre 4). Le système est donc soumis à cette réaction (force de liaison) et à son poids, dont la projection est

$$\vec{P} = mg \cos(\pi - \theta) \vec{e}_r + mg \sin(\pi - \theta) \vec{e}_\theta = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta,$$

ou encore

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z = -mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta).$$



Nous nous intéressons désormais seulement à la recherche des positions d'équilibre, pour lesquelles $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\phi} = \text{cst}$; par ailleurs, $\dot{r} = 0$ à cause des contraintes. L'expression de l'accélération en coordonnées sphériques se réduit ainsi à

$$\vec{a} = -r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \vec{e}_r - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta.$$

Comme la force de liaison est perpendiculaire à l'anneau, $\vec{T} \cdot \vec{e}_\theta = 0$. L'équation du mouvement projetée sur $\vec{e}_\theta$ s'écrit donc

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Or,

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = -mg \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = mg \sin \theta$$

donc

$$mg \sin \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta.$$

On en déduit que la position d'équilibre satisfait une des conditions suivantes

$$\sin \theta = 0, \quad \text{soit} \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \pi, \quad \text{ou bien} \quad \cos \theta = -\frac{g}{r\dot{\phi}^2}.$$

Si $\frac{g}{r\dot{\phi}^2} > 1$, c'est-à-dire si $\dot{\phi}^2 < \frac{g}{r}$, il n'y a que les solutions $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Par contre, si $\dot{\phi}^2 > \frac{g}{r}$, il y a une autre solution donnée par

$$\theta = \arccos \left(-\frac{g}{r\dot{\phi}^2} \right).$$

On peut montrer que si $\dot{\phi}^2 < \frac{g}{r}$, la solution $\theta = \pi$ est stable et la solution $\theta = 0$ instable, alors que si $\dot{\phi}^2 > \frac{g}{r}$, c'est la solution $\theta = \arccos \left(-\frac{g}{r\dot{\phi}^2} \right)$ qui est stable, et les deux autres instables.

Remarque. Quand $\dot{\phi} \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ce qui est intuitif.

V. Coordonnées polaires

Pour les problèmes où le mouvement se situe dans un plan défini par un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on peut remplacer ce repère par le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$. Les coordonnées ρ et ϕ sont appelées **coordonnées polaires**. On peut les voir comme deux des trois coordonnées cylindriques en se limitant au plan défini par $z = 0$, ou comme deux des trois coordonnées sphériques en se limitant au plan défini par $\theta = \pi/2$.

Le vecteur rotation qui décrit la rotation des vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ est donné par $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z$, ce qui correspond à la fois au vecteur rotation des coordonnées cylindriques, et au vecteur rotation des coordonnées sphériques lorsque θ est constant (et donc $\dot{\theta} = 0$).

Dans ce repère, le vecteur position est donné simplement par

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho,$$

la vitesse prend la forme

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi,$$

et l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \vec{e}_\phi.$$

Remarque. Comme, lorsqu'on se limite au plan défini par un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, la coordonnée ρ et le vecteur $\vec{e}_\rho$ des coordonnées cylindriques sont confondus avec la coordonnée r et le vecteur $\vec{e}_r$ des coordonnées sphériques, on utilise souvent la notation alternative selon laquelle le vecteur position est donné par

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r,$$

la vitesse par

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\phi} \vec{e}_\phi,$$

et l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \vec{e}_\phi.$$

Le problème du pendule traité plus haut en coordonnées cylindriques aurait pu être traité directement en coordonnées polaires, ce qui conduit bien sûr rigoureusement aux mêmes équations puisque la coordonnée z n'intervient pas.

Oscillateur harmonique

« Dès lors mon âme en branle n'a plus fait que passer par la ligne du repos, et ses oscillations toujours renouvelées ne lui ont jamais permis d'y rester. »

— Jean-Jacques Rousseau

Le principe fondamental de la dynamique s'applique à des situations beaucoup plus générales que le mouvement des objets dans le champ de pesanteur. L'un des problèmes qui trouvent le plus grand nombre d'applications en physique est celui de l'**oscillateur harmonique**, un modèle qui décrit les petites oscillations de toutes sortes de systèmes autour de sa position d'équilibre. L'exemple le plus simple est celui d'une masse attachée à un ressort.

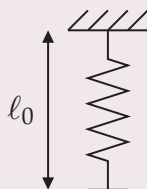
I. Ressort, loi de Hooke

Considérons un ressort de longueur au repos ℓ_0 . Si l'on tire sur le ressort, ou si on le comprime, le ressort va exercer une force qui s'oppose à la déformation. La loi de Hooke, vérifiée empiriquement, donne des informations sur cette déformation.

Loi (Loi de Hooke). La loi de Hooke stipule que, tant que la déformation n'est pas trop grande, la force est proportionnelle à l'allongement ou à la contraction du ressort :

$$\|\vec{F}\| = k |\ell - \ell_0| ,$$

où k est la raideur du ressort.



Si l'on choisit un axe z orienté selon le ressort et pointant vers le haut pour un ressort suspendu à un support, on a donc :

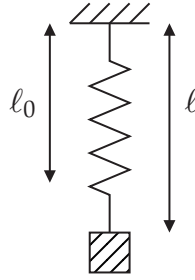
$$F_z = k (\ell - \ell_0) .$$

En effet, si $\ell > \ell_0$, le ressort exerce une force de rappel, donc positive si l'orientation est dans le sens du ressort.

1. Position d'équilibre

Considérons désormais le cas où une masse m est attachée au ressort. Si l'extension du ressort est égale à ℓ , la masse est soumise à la somme de son poids et de la force de rappel :

$$F_z = -mg + k(\ell - \ell_0) .$$



À l'équilibre, cette force s'annule :

$$mg = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) ,$$

d'où l'on tire

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{m}{k}g .$$

2. Petites oscillations

Choisissons un repère dont l'origine est à la position d'équilibre, avec l'axe z toujours orienté vers le haut. La longueur du ressort est donnée par $\ell = \ell_{\text{eq}} - z$, et la force totale s'écrit :

$$\begin{aligned} F_z &= -mg + k(\ell - \ell_0) \\ &= -mg + k(\ell_{\text{eq}} - z - \ell_0) \\ &= -kz \end{aligned}$$

puisque $mg = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$.

Ainsi, le mouvement de la masse est régi par l'équation différentielle

$$m\ddot{z} = -kz .$$

Dans ce genre de problème, il est usuel de mettre du même côté tous les termes qui dépendent de la fonction inconnue, et cette équation est habituellement écrite :

$$m\ddot{z} + kz = 0 .$$

C'est une équation que nous n'avons pas encore rencontrée¹. Il existe une méthode systématique de résolution d'une équation du type

$$\ddot{z} + f(z) = 0$$

et nous y reviendrons plus tard dans ce cours, mais dans le cas $f(z) = az$, la solution est tellement simple que l'on peut se passer de la solution générale. Il suffit en effet de chercher une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée seconde. Mais il y a deux exemples bien connus :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \cos(at) = -a \sin(at) \\ \frac{d}{dt} \sin(at) = a \cos(at) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \cos(at) = -a^2 \cos(at) \\ \frac{d^2}{dt^2} \sin(at) = -a^2 \sin(at) \end{cases} .$$

1. La résistance de l'air introduit un terme proportionnel à $\dot{z}$, pas à z .

Cherchons donc la solution de

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

sous la forme² $z = \cos(\omega t)$:

$$-\omega^2 m \cos(\omega t) + k \cos(\omega t) = 0 \implies (k - \omega^2 m) \cos(\omega t) = 0.$$

Cette équation est satisfaite pour tout temps t si $k - \omega^2 m = 0$, soit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On vérifie aisément que $\sin(\omega t)$ est aussi solution. Par ailleurs, on peut multiplier $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ par des constantes arbitraires. La solution générale peut donc s'écrire

$$z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Les constantes A et B sont ajustées, comme d'habitude, avec les conditions initiales. Supposons par exemple que l'on parte à l'instant $t = 0$ en déplaçant la masse d'une distance d vers le bas, et qu'on la lâche sans vitesse initiale :

$$\begin{cases} z(t=0) = -d \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -d \\ -A\omega \sin(\omega \times 0) + B\omega = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -d \\ B = 0 \end{cases}.$$

La solution est un simple mouvement d'oscillation :

$$z(t) = -d \cos(\omega t).$$

De telles oscillations qui font intervenir une seule fréquence sont dites **harmoniques**.

On écrit aussi parfois la solution générale sous la forme d'une seule fonction trigonométrique avec un déphasage φ :

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi).$$

En développant le cosinus, on peut relier C et φ à A et B :

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \implies \begin{cases} C \cos \varphi = A \\ -C \sin \varphi = B \end{cases}$$

qui a pour solution $C = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \varphi = -B/A$. Avec cette forme, le problème précédent conduit à

$$\begin{cases} C \cos \varphi = -d \\ -\omega C \sin \varphi = 0 \end{cases}.$$

On peut choisir $\varphi = 0$ et $C = -d$, ce qui conduit à la même solution, ou $\varphi = \pi$ et $C = d$, ce qui revient au même puisque $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$.

Définition (Période). La période des oscillations est le temps T que met le système à revenir à la même position.

2. La notation ω est conventionnelle pour une fréquence, dont la dimension est l'inverse d'un temps.

Autrement dit, on cherche T telle que

$$\cos[\omega(t+T)] = \cos(\omega t) \implies \cos(\omega t + \omega T) = \cos(\omega t) \quad \forall t.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\omega T = 2\pi n$, n entier. La plus petite solution non nulle est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ainsi, la période des oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Cette période dépend de m et de k mais **pas** de l'amplitude C des oscillations.

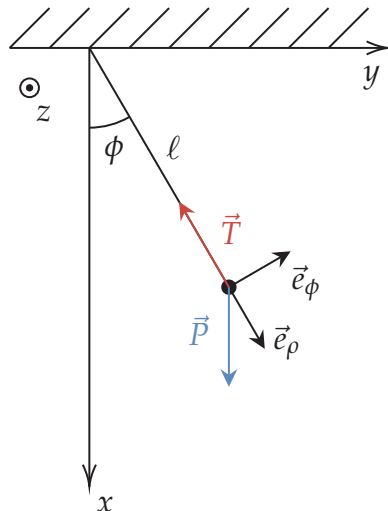
II. Le pendule

Un autre exemple d'oscillateur est celui d'un pendule contraint à osciller dans un plan vertical perpendiculaire à z . L'équation du mouvement a déjà été établie dans le chapitre précédent comme exemple d'utilisation des coordonnées cylindriques définies sur la figure. Pour rappel, l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = -\ell\dot{\phi}^2 \vec{e}_r + \ell\ddot{\phi} \vec{e}_\phi,$$

et le pendule est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_x$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.



Si on projette l'équation du mouvement sur $\vec{e}_\phi$, la tension, qui est inconnue, disparaît, et il vient :

$$\begin{aligned} mg \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi}_{-\sin \phi} &= m\ell\ddot{\phi} \\ -mg \sin \phi &= m\ell\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle qui ne possède pas de solution simple. Par contre, si l'on se limite aux petites oscillations, on peut faire l'approximation

$$\sin \phi \simeq \phi ,$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 .$$

Cette équation a la même forme que celle du ressort, et la solution générale est de la forme

$$\phi = A \cos (\omega t + \varphi) ,$$

ou A et φ sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales, et

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{soit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

C'est un mouvement périodique de fréquence $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ **indépendante de m** . La période est égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

On peut alors projeter la deuxième loi sur $\vec{e}_r$ pour en déduire la tension du fil :

$$\begin{aligned} m \vec{a} \cdot \vec{e}_r &= -T + mg \cos \phi \\ T &= m\ell\dot{\phi}^2 + mg \cos \phi , \end{aligned}$$

ou encore, comme fonction du temps,

$$T(t) = m\ell A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) + mg \cos[A \cos(\omega t + \varphi)] .$$

On peut aisément en déduire les valeurs extrémales de la tension en dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= m\ell A^2 \omega^2 2\omega \sin (\omega t + \varphi) \cos (\omega t + \varphi) \\ &\quad - mg \sin[A \cos(\omega t + \varphi)][-A\omega \sin(\omega t + \varphi)] . \end{aligned}$$

La dérivée s'annule si $\sin(\omega t + \varphi) = 0$, soit $\phi = A$, l'angle maximum, ou encore si $\cos(\omega t + \varphi) = 0$, soit $\phi = 0$. Lorsque $\phi = 0$, la tension vaut $T = m\ell A^2 \omega^2 + mg$, alors que pour l'angle maximum $\phi = A$ elle vaut $T = mg \cos A$. Comme $mg \cos A < m\ell A^2 \omega^2 + mg$, on en déduit que la tension est maximale pour $\phi = 0$. Lorsque le pendule est immobile, $A = 0$, et on retrouve que la tension du fil en $\phi = 0$ est donnée par $T = mg$, comme il se doit.

III. Oscillations amorties

Dans un traitement plus réaliste des oscillations d'une masse attachée à un ressort, il faut prendre en compte des forces qui vont progressivement amortir ce mouvement. L'une d'elle est la force de frottement due à la résistance de l'air $\vec{F}_r = -b \vec{v}$. Si l'on prend cette force en compte, l'équation différentielle en z devient

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0 .$$

Pour trouver une solution, l'idéal serait que la dérivée première **et** la dérivée seconde de z soient proportionnelles à z . Mais nous connaissons une telle fonction :

$$\frac{d}{dt} \exp(\gamma t) = \gamma \exp(\gamma t) \implies \frac{d^2}{dt^2} \exp(\gamma t) = \gamma^2 \exp(\gamma t) .$$

Cherchons donc une solution de la forme $z(t) = \exp(\gamma t) (= e^{\gamma t})$:

$$m\gamma^2 e^{\gamma t} + b\gamma e^{\gamma t} + k e^{\gamma t} = 0 \implies e^{\gamma t} (m\gamma^2 + b\gamma + k) = 0 ,$$

qui est vrai à chaque instant t si

$$m\gamma^2 + b\gamma + k = 0 .$$

γ doit donc être solution d'une équation du second degré. Son discriminant est donné par

$$\Delta = b^2 - 4km .$$

Il peut être positif ou négatif. Il faut donc envisager plusieurs cas de figure.

1. Régime supercritique

$$\Delta = b^2 - 4km > 0$$

Dans ce cas, il y a deux solutions réelles données par

$$\gamma_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} .$$

Notons que, puisque $b > 0$, les solutions sont négatives :

$$\gamma_2 < \gamma_1 < 0 .$$

La solution générale est donc de la forme

$$z(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t} .$$

Avec les conditions initiales habituelles ($z(t=0) = -d$, $\dot{z}(t=0) = 0$), il vient :

$$\begin{cases} A + B = -d \\ A\gamma_1 + B\gamma_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{d}{1 - \gamma_1/\gamma_2} \\ B = -\frac{d}{1 - \gamma_2/\gamma_1} \end{cases} .$$

La solution est la somme de deux exponentielles décroissantes. Elle tend vers 0 à la limite $t \rightarrow +\infty$. C'est le régime fortement amorti, dit **supercritique**. La décroissance est dominée par $e^{\gamma_1 t}$ aux temps longs.

2. Régime critique

$$\Delta = b^2 - 4km = 0$$

Dans ce cas, l'équation en γ a une racine double $\gamma = -\frac{b}{2m}$, et la solution générale est de la forme :

$$z(t) = (A + Bt) e^{\gamma t}$$

$z(t)$ tend aussi vers 0 de façon monotone quand $t \rightarrow +\infty$, mais moins vite. C'est le régime dit **critique**.

Justification. $z(t) = e^{\gamma t}$ est solution d'après ce qui précède. Démontrons que $z(t) = te^{\gamma t}$ est aussi solution.

$$\begin{aligned} z(t) &= te^{\gamma t} \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= e^{\gamma t} + \gamma te^{\gamma t} \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t} + \gamma e^{\gamma t} + \gamma^2 te^{\gamma t} = 2\gamma e^{\gamma t} + \gamma^2 te^{\gamma t} \end{aligned}$$

d'où

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = te^{\gamma t} \underbrace{(m\gamma^2 + b\gamma + k)}_{=0} + e^{\gamma t} \underbrace{(2m\gamma + b)}_{=0} = 0.$$

Complément (Preuve). Comme dans ce cas l'équation a une racine double $\gamma = -\frac{b}{2m}$, on pourrait être tenté d'en déduire que la solution générale est de la forme $z(t) = Ae^{\gamma t}$, mais ce n'est pas possible : comme on peut fixer indépendamment la position initiale et la vitesse initiale, il faut deux constantes d'intégration. Cela suggère que si l'on cherche la solution sous la forme

$$z(t) = e^{\gamma t}u(t),$$

la solution la plus générale pour $u(t)$ n'est pas $u(t) = \text{cte}$. Écrivons l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$. Comme

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t}u(t) + e^{\gamma t}\dot{u}(t) \\ \ddot{z}(t) &= \gamma^2 e^{\gamma t}u(t) + \gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + \gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + e^{\gamma t}\ddot{u}(t) \\ &= \gamma^2 e^{\gamma t}u(t) + 2\gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + e^{\gamma t}\ddot{u}(t), \end{aligned}$$

l'équation différentielle pour $u(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} m(\gamma^2 e^{\gamma t}u + 2\gamma e^{\gamma t}\dot{u} + e^{\gamma t}\ddot{u}) + b(\gamma e^{\gamma t}u + e^{\gamma t}\dot{u}) + ke^{\gamma t}u &= 0 \\ \Rightarrow e^{\gamma t}[m\ddot{u} + (b + 2\gamma m)\dot{u} + (m\gamma^2 + b\gamma + k)u] &= 0. \end{aligned}$$

Mais $m\gamma^2 + b\gamma + k = 0$ puisque γ est solution de l'équation du second degré, et $\gamma = -\frac{b}{2m}$ pour $\Delta = 0$, ce qui implique que le coefficient de $\dot{u}$, $(b + 2\gamma m)$, est aussi égal à 0. L'équation différentielle en u se réduit donc à

$$me^{\gamma t}\ddot{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = 0$$

dont la solution générale est de la forme $u = A + Bt$.

Ainsi, la solution générale lorsque $b^2 - 4km = 0$ est de la forme

$$\boxed{z(t) = (A + Bt)e^{\gamma t}}, \quad \gamma = -\frac{b}{2m}.$$

3. Régime sous-critique

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4km < 0}$$

Dans ce cas, la solution générale est de la forme

$$\boxed{z(t) = e^{\gamma t}(\tilde{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B} \sin(\tilde{\omega}t))},$$

ou encore, comme vu précédemment,

$$\boxed{z(t) = e^{\gamma t}C \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)}.$$

avec $\gamma = -\frac{b}{2m}$ et $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il s'agit d'oscillations amorties. C'est le régime dit **sous-critique**.

Justification. Démontrons que $z(t) = e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t)$ est solution.

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) - \tilde{\omega} e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= \gamma^2 e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) - \gamma e^{\gamma t} \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} t) - \gamma e^{\gamma t} \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} t) - \tilde{\omega}^2 e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) \end{aligned}$$

d'où

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) (m\gamma^2 - m\tilde{\omega}^2 + b\gamma + k) + e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) (-b\tilde{\omega} - 2m\gamma\tilde{\omega}) = 0.$$

puisque

$$m\gamma^2 - m\tilde{\omega}^2 + b\gamma + k = m\gamma^2 - m \underbrace{\omega_0^2}_{k/m} + m\gamma^2 + b\gamma + k = \gamma \underbrace{(2m\gamma + b)}_{=0} = 0.$$

et

$$-b\tilde{\omega} - 2m\gamma\tilde{\omega} = -\tilde{\omega} \underbrace{(b + 2m\gamma)}_{=0} = 0.$$

On démontre de même aisément que $z(t) = e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t)$ est solution.

Complément (Preuve). Dans ce cas, l'équation du second degré a deux racines complexes données par

$$\gamma_+ = \frac{-b + i\sqrt{4km - b^2}}{2m} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \frac{-b - i\sqrt{4km - b^2}}{2m}.$$

Ces deux racines sont complexes conjuguées, ce qui est normal puisque leur somme, $-\frac{b}{m}$, est réelle. Écrivons ces racines

$$\gamma_+ = \gamma + i\tilde{\omega} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \gamma - i\tilde{\omega},$$

avec

$$\gamma = -\frac{b}{2m} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m},$$

ou encore $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la fréquence de l'oscillateur non amorti.

La solution générale dans $\mathbb{C}$ est de la forme

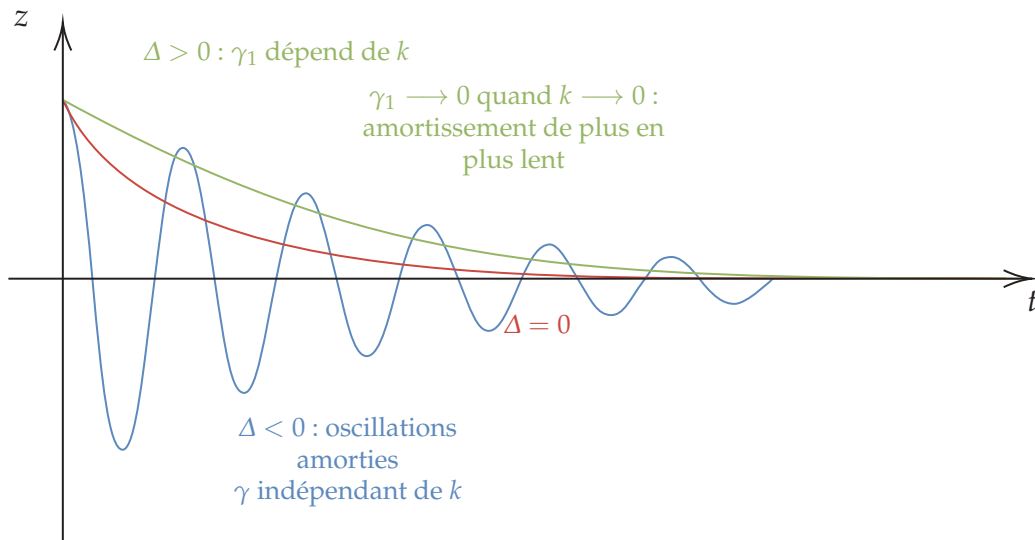
$$z(t) = e^{\gamma t} (A e^{i\tilde{\omega} t} + B e^{-i\tilde{\omega} t}), \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Pour trouver des solutions réelles, il suffit de prendre la partie réelle de cette solution. Posons $A = A_1 + iA_2$ et $B = B_1 + iB_2$.

$$\begin{aligned} \Re(A e^{i\tilde{\omega} t} + B e^{-i\tilde{\omega} t}) &= A_1 \cos(\tilde{\omega} t) - A_2 \sin(\tilde{\omega} t) + B_1 \cos(\tilde{\omega} t) + B_2 \sin(\tilde{\omega} t) \\ &= (A_1 + B_1) \cos(\tilde{\omega} t) + (B_2 - A_2) \sin(\tilde{\omega} t). \end{aligned}$$

Puisque A_1 , B_1 , A_2 et B_2 sont quelconques, cela signifie que la solution réelle la plus générale est de la forme

$$z(t) = e^{\gamma t} (\tilde{A} \cos(\tilde{\omega} t) + \tilde{B} \sin(\tilde{\omega} t)).$$



IV. Oscillations forcées, résonance

Si l'on veut forcer un oscillateur à osciller à une certaine fréquence sans amortissement, on peut y parvenir en le soumettant à une force dépendant du temps de façon harmonique :

$$f \cos(\omega t) ,$$

où ω est une fréquence arbitraire. L'équation différentielle prend la forme

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = f \cos(\omega t) .$$

La solution générale est la somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière. Nous connaissons déjà la forme de la solution générale de l'équation sans second membre, et dès que $b > 0$, cette solution décroît exponentiellement vite (avec ou sans oscillations).

On peut démontrer que l'équation avec second membre possède une solution particulière de la forme :

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

où, comme précédemment, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\gamma = -\frac{b}{2m}$.

Complément (Preuve). Pour trouver une solution de l'équation avec second membre, on remarque que si l'on prend une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, le membre de gauche sera encore une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, et en annulant le coefficient de $\sin(\omega t)$, on pourra satisfaire l'équation. Posons donc

$$\begin{aligned} z(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) . \end{aligned}$$

L'équation différentielle conduit à

$$\begin{aligned} m(-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)) + b(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) \\ + k(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = f \cos(\omega t) \end{aligned}$$

soit donc

$$\cos(\omega t) [-mA\omega^2 + bB\omega + kA - f] + \sin(\omega t) [-mB\omega^2 - bA\omega + kB] = 0.$$

Cette équation sera satisfaite dès que

$$\begin{cases} (k - m\omega^2) A + b\omega B = f \\ -b\omega A + (k - m\omega^2) B = 0 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est égal à $\text{Det} = (k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2$. Il est strictement positif dès que $b \neq 0$ ou que $k - m\omega^2 \neq 0$. Si l'une au moins de ces conditions est satisfaite, il y a une solution unique en A et B donnée par :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\text{Det}} \begin{vmatrix} f & b\omega \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = f \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \\ B = \frac{1}{\text{Det}} \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & f \\ -b\omega & 0 \end{vmatrix} = f \frac{b\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \end{cases}$$

Cette solution peut être, comme vu précédemment, réécrite sous la forme

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A},$$

soit

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} \quad \text{et} \quad C = f \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}},$$

où φ doit être choisi dans l'intervalle $[-\pi, 0]$ parce que $\sin \varphi = -\frac{B}{C} < 0$.

À l'aide de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de $\gamma = -\frac{b}{2m}$, ce résultat se réécrit

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Si l'oscillateur est amorti, c'est-à-dire si $b > 0$, la solution (dite transitoire) de l'équation sans second membre devient négligeable pour des temps assez grands vu qu'elle décroît exponentiellement alors que la solution particulière oscille à la fréquence ω .

Le phénomène remarquable, c'est que l'amplitude des oscillations dépend de la fréquence, et qu'elle devient très grande pour les systèmes peu amortis lorsque ω s'approche de sa **fréquence propre** ω_0 , c'est-à-dire la fréquence à laquelle ce système oscillerait s'il était libre, sans oscillation forcée ni amortissement. L'amplitude maximale est atteinte lorsque

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = 0 \implies 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \implies \omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2.$$

Lorsque $\gamma \rightarrow 0$, la fréquence du maximum tend vers ω_0 , et l'amplitude diverge ! Ce phénomène est connu sous le nom de **résonance**, et il peut avoir des conséquences catastrophiques si, par malchance, un système est perturbé par une action extérieure qui agit à une fréquence proche de sa fréquence propre.

Forces, travail et énergie

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. »

— Antoine Lavoisier

I. Les différents types de force

Un objet en interaction avec son environnement peut être soumis à de nombreux types de force.

1. Interaction à distance entre particules

L'exemple le plus évident, c'est la **gravitation** entre deux particules massives :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Mais ce n'est en général pas la seule force entre particules. Par exemple, si deux particules portent des charges q_1 et q_2 , elles interagissent par la **force de Coulomb** :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

C'est une interaction **attractive** si les charges sont de signes opposés ($q_1 q_2 < 0$) et **répulsive** si les charges sont de même signe ($q_1 q_2 > 0$).

Plus généralement, des particules chargées en mouvement créent un **champ électromagnétique** défini par un **champ électrique** $\vec{E}$ et un **champ magnétique** $\vec{B}$. Une particule de charge q placée dans un tel champ est soumise à la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right).$$

2. Forces de rappel

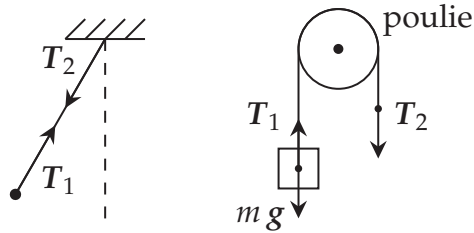
Nous avons déjà vu qu'un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à l'allongement :

$$\|\vec{F}\| = k(\ell - \ell_0), \quad (\text{loi de Hooke})$$

et dirigée le long du ressort.

Un fil inextensible de masse négligeable exerce aussi une force de rappel dirigée le long du fil. Cette force est appelée **tension**. Son intensité est la même en tout point du fil :

$$\|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\|.$$



Dans l'exemple de la poulie, la masse monte si $\|\vec{T}_2\| > mg$ et descend si $\|\vec{T}_2\| < mg$.

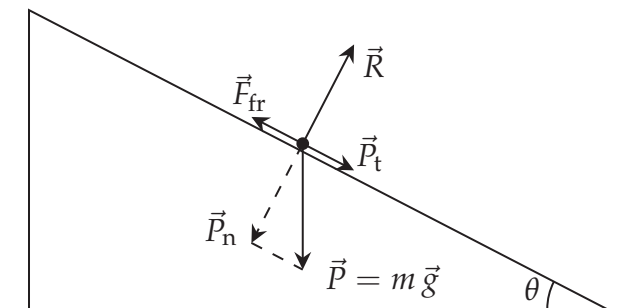
3. Forces de contact avec un solide

Lorsqu'un objet est en contact avec un support, il subit deux forces :

- la **réaction** $\vec{R}$, qui correspond à la composante perpendiculaire au support et est une forme de force de liaison (voir point suivant);
- la **force de frottement** qui s'oppose au mouvement, et qui correspond à la composante tangentielle, elle est souvent notée $\vec{F}_{\text{fr}}$.

Prenons l'exemple d'un plan incliné, et décomposons le poids en une composante normale au plan $\vec{P}_n$ et une composante tangentielle $\vec{P}_t$:

$$\vec{P} = \vec{P}_n + \vec{P}_t.$$



La réaction $\vec{R}$ est simplement opposée aux forces normales au support qui attirent l'objet vers le support. Dans le cas du plan incliné, son intensité est donc donnée par

$$\|\vec{R}\| = mg \cos \theta.$$

La force de frottement dépend des circonstances. Si l'objet est au repos (cas **statique**), elle s'oppose simplement aux forces tangentielles qui agissent sur l'objet. Mais son intensité est limitée :

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| \leq \mu_s R,$$

où μ_s est le **coefficient de frottement statique** et $R = \|\vec{R}\|$ l'intensité de la réaction.

Dans le cas du plan incliné, la force tangentielle est la composante du poids parallèle au plan incliné, d'intensité

$$\|\vec{P}_t\| = mg \sin \theta.$$

L'objet ne pourra être au repos que si $\vec{F}_{\text{fr}} + \vec{P}_t = 0$. On en déduit que

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| = mg \sin \theta.$$

Cela n'est possible que si

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| = mg \sin \theta \leq \mu_s R = \mu_s mg \cos \theta \implies \sin \theta \leq \mu_s \cos \theta,$$

soit donc si

$$\boxed{\tan \theta \leq \mu_s.}$$

Cette inégalité permet de mesurer μ_s . En effet, si l'on change l'inclinaison du support, l'objet restera immobile tant que $\tan \theta \leq \mu_s$. L'angle θ_s pour lequel il décroche permet de déduire μ_s puisque pour cet angle

$$\boxed{\mu_s = \tan \theta_s.}$$

Si l'objet est en mouvement (cas **dynamique**), il subit une force de frottement dont l'intensité est simplement proportionnelle à la réaction :

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| = \mu_c \|\vec{R}\|,$$

où μ_c est le **coefficient de frottement cinétique**. En général, $\mu_c < \mu_s$.

Pour mesurer μ_c , il suffit de déterminer l'angle θ_c pour lequel la vitesse est constante. Dans ce cas, l'accélération tangentielle est nulle, et la force de frottement est juste l'opposée de la composante tangentielle du poids :

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| = \mu_c \|\vec{R}\| = \|\vec{P}_t\| \implies \mu_c mg \cos \theta_c = mg \sin \theta_c,$$

donc finalement

$$\boxed{\mu_c = \tan \theta_c.}$$

4. Forces de liaison

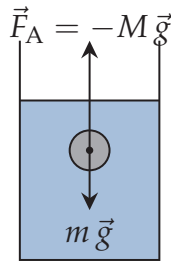
Lorsqu'un point matériel en contact avec son environnement est astreint à se déplacer sur un support (courbe ou surface) sans autre action de l'environnement que cette contrainte, la force qu'il subit est appelée *force de liaison*. Cette force est toujours perpendiculaire au support, et son intensité (la norme du vecteur) n'est pas connue a priori. Cette intensité doit être considérée comme une inconnue du problème. Lorsque l'intensité de cette force s'annule, le point matériel n'est plus soumis à la contrainte et quitte le support (condition de décollement).

Nous avons déjà rencontré des exemples de forces de liaison : la tension d'un fil de masse négligeable, la réaction de l'anneau sur un point matériel astreint à glisser sans frottement. La réaction du support pour des solides en contact est aussi une force de liaison si les frottements sont négligeables.

5. Forces exercées par un fluide

Un objet plongé dans un fluide subit deux forces de la part du fluide.

- La **poussée d'Archimède** : un corps plongé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force opposée à celle à laquelle serait soumis un objet de même volume rempli de fluide. Dans le champ de pesanteur, cette force est verticale ascendante, et d'intensité $\|\vec{F}_A\| = Mg$, où M est la masse de fluide déplacé.



- Une force de **frottement fluide** : cette force s'annule lorsque la vitesse tend vers 0. On s'attend donc à ce que son intensité soit proportionnelle à v^α , $\alpha > 0$.

Dans le régime dit **laminaire**, lorsque la vitesse n'est pas trop grande, on a

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -b_l \vec{v}.$$

C'est ce que nous avons utilisé pour le mouvement balistique avec frottement.

Dans le régime **turbulent**, qui apparaît lorsque la vitesse est grande, le frottement augmente avec une puissance plus grande. On utilise souvent la forme

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

II. Impulsion, puissance, travail

Lorsqu'un objet est soumis à une force $\vec{F}(t)$ au cours de son mouvement, il est très utile d'introduire trois quantités associées à cette force.

1. Impulsion

Définition 1 (Impulsion). L'impulsion reçue par un objet entre les instants t_1 et t_2 est définie par

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Son unité est du N s ou encore kg m s^{-1} . Si $\vec{F}$ est indépendante du temps, l'impulsion est simplement proportionnelle à l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t.$$

Proposition. Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel, alors

$$\vec{I}_{12} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \equiv \Delta \vec{p},$$

où $\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$ est la quantité de mouvement du point matériel.

Démonstration. D'après le principe fondamental,

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Ainsi,

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt.$$

Considérons une composante, par exemple p_x :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_x}{dt} dt = p_x(t_2) - p_x(t_1),$$

puisque p_x est une primitive de $\frac{dp_x}{dt}$. Il en va de même pour les autres composantes, d'où le résultat annoncé.

Exemple d'application : Si une balle dure et une balle molle de même masse rebondissent sur le sol à la même vitesse, l'impulsion reçue lors du rebond est la même. Mais pour la balle dure, cette impulsion est transmise sur un intervalle de temps beaucoup plus court, et la force est donc beaucoup plus importante.

2. Puissance

Définition 2 (Puissance). La puissance d'une force est définie par le produit scalaire de la force avec la vitesse :

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Elle est mesurée en Watt [W]. C'est une mesure de la quantité d'énergie par unité de temps qu'un système peut recevoir (voir travail ci-dessous).

Exemples.

1. Puissance du poids : $P = m \vec{g} \cdot \vec{v}$. La puissance est maximale si le mouvement est vertical ; elle est nulle si le mouvement est horizontal.
2. Puissance de la force de frottement fluide en régime laminaire :

$$P = -b \vec{v} \cdot \vec{v} = -bv^2 < 0.$$

La puissance est négative : une telle force prend de l'énergie au système.

3. Travail

Définition 3 (Travail d'une force). Pour quantifier la quantité d'énergie reçue par un système, il suffit d'intégrer la puissance entre deux instants :

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt.$$

$\mathcal{W}$ (*work* en anglais) s'appelle le **travail de la force**.

Proposition. Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel, alors

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Démonstration. D'après le principe fondamental,

$$\vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

D'après la définition, le travail s'écrit donc

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt.$$

Mais $\vec{v}^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)$:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}^2(t) = 2 \frac{dv_x}{dt} v_x + 2 \frac{dv_y}{dt} v_y + 2 \frac{dv_z}{dt} v_z = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\vec{v}^2(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} m [\vec{v}^2(t)]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{1}{2} m v(t_2)^2 - \frac{1}{2} m v(t_1)^2. \end{aligned}$$

Au vu de ce résultat, il est utile d'introduire l'énergie cinétique.

Définition 4 (Énergie cinétique). L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2.$$

La lettre K est choisie pour le terme *kinetic* en anglais.

Avec cette définition, la proposition précédente peut se reformuler de la façon suivante.

Théorème (Théorème de l'énergie cinétique). Le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique :

$$\mathcal{W}_{12} = K_2 - K_1.$$

Le travail et l'énergie se mesurent tous deux en Joule [J], dont la dimension est [N m] ou [kg m² s⁻²].

Puissance et énergie cinétique : d'après ce qui précède, on a

$$P(t) = \frac{dK}{dt}.$$

La puissance est de ce fait aussi exprimée en [J s⁻¹].

Travail et déplacement : l'expression

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

est tout à fait générale, et elle s'applique même au cas où les composantes de la force dépendant des positions, des vitesses et du temps :

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} [F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \dot{x}(t) + F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \dot{y}(t) + F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \dot{z}(t)] dt.$$

Dans le cas très fréquent où la force ne dépend pas des vitesses ni du temps, le travail prend une forme plus simple et plus intuitive :

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où C est le chemin de A à B . Plus précisément,

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(t) dt = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds,$$

où s est l'abscisse curviligne.

Proposition. En particulier, si la force est uniforme (la même le long du chemin) :

$$\mathcal{W}_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{AB}.$$

Démonstration. Puisque la force ne change pas pendant le déplacement, on peut la sortir de l'intégrale et écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{12} &= \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \\ &= \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \vec{F} \cdot [\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)] \\ &= \vec{F} \cdot \vec{AB} \end{aligned}$$

si $\vec{r}(t_1) = \vec{OA}$ et $\vec{r}(t_2) = \vec{OB}$ puisque $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AB}$.

III. Forces conservatives, énergie potentielle

Définition 5 (Force conservative et énergie potentielle). Considérons une force $\vec{F}(\vec{r})$ qui ne dépend que de $\vec{r}$. Cette force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi. On peut montrer que cela implique qu'il existe une fonction de l'espace appelée **énergie potentielle** $V(\vec{r})$ telle que

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2).$$

Cela implique en particulier que le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul.

Remarque. Comme l'énergie potentielle n'intervient que par sa différence, elle n'est définie qu'à une constante près. On peut donc choisir la valeur de référence $V = 0$ où on veut.

Exemples.

1. Le poids $\vec{P} = m \vec{g}$ est uniforme. Ainsi, le travail est donné par

$$\mathcal{W}_{AB} = \vec{P} \cdot \vec{AB}.$$

Il ne dépend que du vecteur $\vec{AB}$, donc il ne dépend pas du chemin suivi.

Si on pose $\vec{P} = -m g \vec{e}_z$, on a :

$$\mathcal{W}_{AB} = -m g \vec{e}_z \cdot \vec{AB} = -m g (z_B - z_A) = m g z_A - m g z_B.$$

Cela suggère de choisir comme énergie potentielle du poids :

$$V(\vec{r}) = m g z .$$

2. Les forces de frottement ne sont pas conservatives. En effet, la puissance est strictement négative, comme nous l'avons vu dans le cas du frottement fluide dans le régime laminaire :

$$\vec{F} = -b \vec{v} \implies P = -bv^2 < 0 .$$

Ainsi, le travail d'une force de frottement est strictement négatif, et il ne peut pas s'annuler le long d'une boucle.

3. **Force de rappel** : dans le cas de la force de rappel d'un ressort, on a vu qu'elle s'exprimait comme

$$F_z = -kz$$

si l'on prend $z = 0$ comme la position d'équilibre. Si le mouvement est vertical, $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$, et la puissance est donnée par

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -kz\dot{z} = -\frac{k}{2} \frac{d(z^2)}{dt} . \quad (1)$$

Le travail est donc donné par :

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{k}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(z^2)}{dt} dt = -\frac{k}{2} [z(t_2)^2 - z(t_1)^2] = \frac{k}{2} z(t_1)^2 - \frac{k}{2} z(t_2)^2 .$$

On peut donc choisir comme potentiel $V(z) = \frac{1}{2}kz^2$.

4. **Force centrale** : la force exercée par une particule sur une autre du fait de la gravitation ou de la force de Coulomb est de la forme

$$\vec{F} = -\frac{C}{r^2} \vec{e}_r ,$$

où l'on a pris comme origine la particule qui exerce une force sur l'autre. La constante C est positive pour la gravitation, mais elle peut être positive ou négative pour la force de Coulomb.

Or, en coordonnées sphériques, la vitesse est donnée par

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi .$$

Ainsi, la puissance est donnée par

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{C}{r^2} \dot{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{C}{r} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{r} \right) .$$

Le travail est donc donné par

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{r} \right) dt = \frac{C}{r_2} - \frac{C}{r_1} .$$

Or, par définition de l'énergie potentielle, $\mathcal{W}_{12} = V_1 - V_2$, d'où l'on déduit

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\frac{C}{r} .}$$

Cette énergie potentielle ne dépend que de r . C'est un résultat général pour toute force centrale, c'est-à-dire pour toute force dirigée vers un même point et dont l'intensité ne dépend que de la distance à ce point.

Théorème (Théorème de l'énergie mécanique). Pour une force conservative, l'**énergie mécanique** définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est conservée :

$$E = V + K = \text{cte.}$$

Preuve. Nous avons vu que, de façon tout à fait générale,

$$\mathcal{W}_{12} = K_2 - K_1.$$

Or, pour une force conservative, on a aussi

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2.$$

On en déduit donc que

$$K_2 - K_1 = V_1 - V_2 \implies V_1 + K_1 = V_2 + K_2.$$

L'énergie mécanique est un exemple d'**intégrale première**, c'est-à-dire d'une quantité conservée au cours du temps. Ces intégrales premières sont très utiles car elles correspondent à avoir intégré une fois les équations du mouvement. Elles ne font intervenir que les dérivées premières.

Exemples.

1. **Le champ de pesanteur** : Pour un mouvement vertical, le théorème de l'énergie mécanique mène à

$$mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \text{cte.}$$

Si l'on dérive cette équation par rapport au temps, il vient

$$mg\dot{z} + m\ddot{z}\dot{z} = 0.$$

En divisant par $\dot{z}$, on obtient

$$m\ddot{z} = -mg,$$

et l'on retrouve le principe fondamental.

2. **Force de rappel** : dans le cas de la force de rappel, le théorème de l'énergie cinétique conduit à

$$\frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \text{cte} \implies m\ddot{z}\dot{z} = -k\dot{z}z \implies m\ddot{z} = -kz.$$

Le théorème de l'énergie mécanique permet de répondre de façon très économique à des questions faisant intervenir la vitesse.

Exemple. On laisse tomber un objet d'une hauteur h sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse lors de l'impact ?

Réponse : on a

$$mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E,$$

où E est donc une constante. À $t = 0$, $z = h$ et $\dot{z} = 0$, donc $E = mgh$. Au moment de l'impact, $z = 0$, donc

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 = mgh \implies \boxed{\dot{z} = \sqrt{2gh}.$$

Définition (Gradient). Le gradient d'une fonction f est défini par

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix},$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ est appelé **gradient** ou *nabla*, et où le symbole $\frac{\partial f}{\partial x}$ désigne la **dérivée partielle** de la fonction f par rapport à la coordonnée x définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \varepsilon \vec{e}_x) - f(\vec{r})}{\varepsilon} \quad (2)$$

Proposition. Si une force est conservative, alors elle est reliée à l'énergie potentielle par

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}).$$

On dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(\vec{r})$ (où, par abus de langage, on parle souvent de **potentiel** pour l'énergie potentielle).

Justification. Considérons le travail entre 2 points $\vec{r}$ et $\vec{r} + \varepsilon \vec{e}_x$. Si ε est suffisamment petit, la force $\vec{F}$ peut être considérée comme constante, et son travail est donné par

$$W = \vec{F} \cdot \varepsilon \vec{e}_x = \varepsilon F_x. \quad (3)$$

et donc, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $W/\varepsilon \rightarrow F_x$. Mais, par définition de l'énergie potentielle, ce travail est donné par

$$W = V(\vec{r}) - V(\vec{r} + \varepsilon \vec{e}_x) \quad (4)$$

D'après la définition de la dérivée partielle, $W/\varepsilon \rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On en déduit que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (5)$$

Complément (Rotationnel). Pour savoir si une force est conservative, il est utile de considérer son rotationnel.

Définition (Rotationnel). Le rotationnel d'un vecteur $\vec{f}$ est défini par

$$\vec{\text{rot}} \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Proposition. Si $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative, son **rotationnel** est nul :

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

Preuve. Nous avons

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0,$$

car pour toute fonction de deux variables,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Idem pour les autres composantes.

Remarque. On peut démontrer que toutes ces propriétés sont équivalentes, c'est-à-dire qu'une force $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes.

— Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2).$$

— Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}).$$

— Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi.

— Le travail de $\vec{F}$ est nul pour une trajectoire fermée.

— $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.

IV. Équilibres stables et instables

Lorsqu'un système est soumis à des forces conservatives, l'énergie potentielle permet une discussion très intéressante de la notion d'équilibre et de la stabilité des points d'équilibre.

Considérons l'exemple d'un point matériel se déplaçant dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. Le point matériel est soumis à une force $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -V'(x)\vec{e}_x$. Il sera immobile si et seulement si la force qui s'exerce sur lui est nulle, c'est-à-dire si

$$V'(x) = 0.$$

C'est la condition de l'**équilibre** du point matériel.

Définition (Point d'équilibre). Les points d'équilibre d'un point matériel correspondent aux *minima* et aux *maxima* du potentiel.

Soit x_0 un point d'équilibre, donc un point tel que $V'(x_0) = 0$. Essayons d'évaluer la force pour un x proche de x_0 . On peut écrire

$$\vec{F} = -V'(x)\vec{e}_x,$$

mais, comme x est supposé proche de x_0 , on peut faire un développement limité autour de x_0 :

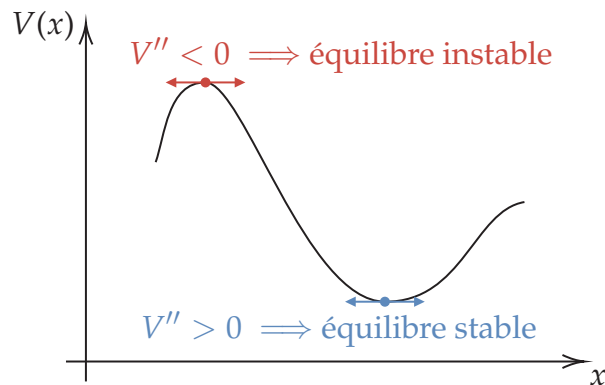
$$\begin{aligned} V'(x) &= V'(x_0) + V''(x_0)(x - x_0) + \dots \\ &= V''(x_0)(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

puisque $V'(x_0) = 0$.

Ainsi, $\vec{F} = -V''(x_0)(x - x_0) \vec{e}_x$. Deux cas de figure se présentent.

1. $V''(x_0) > 0$. La force tend à ramener x vers x_0 . C'est une force de rappel. On dit que l'équilibre est **stable**.
2. $V''(x_0) < 0$. La force tend à éloigner le point matériel de la position d'équilibre. On dit que l'équilibre est **instable**.

Les deux cas de figure sont résumés sur le graphique suivant.



Le concept d'énergie potentielle permet d'éclairer la nature du mouvement autour d'une position d'équilibre stable. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique,

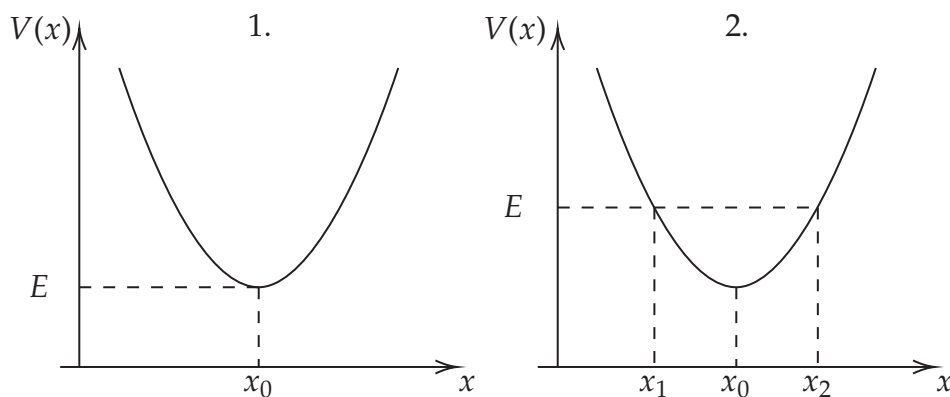
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E,$$

où E , l'énergie du système, est une constante. Cette équation ne peut être satisfaite que si $V(x) \leq E$. Deux cas de figure se présentent.

1. $V(x_0) = E$. Dans ce cas, la vitesse est nulle, et c'est un point d'équilibre. On retrouve le fait qu'un minimum de V correspond à un point d'équilibre.
2. $E > V(x_0)$. Dans ce cas, le point matériel va osciller entre les points x_1 et x_2 définis par

$$V(x_1) = E \quad \text{et} \quad V(x_2) = E \quad \text{avec} \quad x_1 < x_0 < x_2.$$

En effet, quand le point matériel atteint x_1 ou x_2 , l'énergie cinétique s'annule, et la force de rappel ramène le point matériel vers x_0 .



Pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre, la force de rappel $\vec{F} = -V''(x_0)(x - x_0) \vec{e}_x$ est simplement proportionnelle à la distance au point d'équilibre. Les équations du mouvement sont donc les mêmes que pour un ressort de raideur $k = V''(x_0)$, et la période des oscillations est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

Complément (Solution générale). Plus généralement, la période peut s'exprimer simplement en fonction de $V(x)$. En effet, la conservation de l'énergie mécanique conduit à

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

soit

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt,$$

et finalement

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1.$$

Remarque. Alternativement, cette équation peut se réécrire

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 1.$$

Soit $F(x)$ une primitive de $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$, c'est-à-dire une fonction telle que

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Le membre de gauche est donné par

$$\frac{d}{dt} F(x) = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = F'(x) \dot{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Ainsi, si on intègre l'équation

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 1.$$

entre t_1 et t_2 , il vient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(x) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt,$$

ou encore

$$F[x(t_2)] - F[x(t_1)] = t_2 - t_1.$$

Si on pose $x_1 \equiv x(t_1)$ et $x_2 \equiv x(t_2)$, cette équation se réécrit

$$F(x_2) - F(x_1) = t_2 - t_1.$$

ou encore

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = t_2 - t_1.$$

La période est égale au double du temps pour aller de x_1 à x_2 , soit :

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Dans le cas des petites oscillations, on peut limiter le développement de $V(x)$ au deuxième ordre :

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) (x - x_0)^2.$$

Dans ce cas, on sait que la période est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}},$$

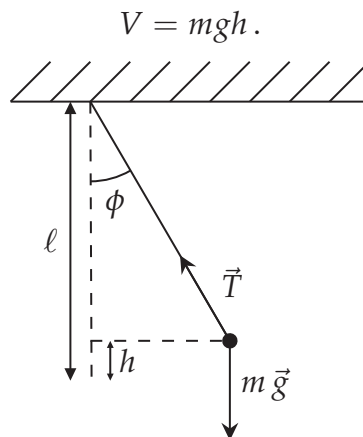
puisque l'équation est la même que pour un ressort de raideur $k = V''(x_0)$. Ce résultat peut se retrouver aisément via la formule générale. Posons en effet $x_0 = 0$, $V(x_0) = 0$. Comme le mouvement est symétrique pour les oscillations harmoniques,

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

avec $V(x) = \frac{1}{2} V'' x^2$ et $E = \frac{1}{2} V'' x_2^2$, d'où

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2m} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{V''}{2} \sqrt{x_2^2 - x^2}}} \\ &= 2\sqrt{2m} \sqrt{\frac{2}{V''}} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x_2^2 - x^2}} \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{V''}} \underbrace{\left[\arcsin \frac{x}{x_2} \right]_0^{x_2}}_{=\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''}}. \end{aligned}$$

Exemple. Considérons de nouveau le pendule simple. Comme la tension est le long du fil, donc perpendiculaire à la vitesse, elle ne travaille pas, et la seule source d'énergie potentielle est le poids :



L'énergie cinétique est donnée par $\frac{1}{2}mv^2$ avec ^a

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z.$$

Comme $\rho = \ell = \text{cte}$, $\vec{v} = \ell \dot{\phi} \vec{e}_\phi$, et l'énergie cinétique est donnée par

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\phi}^2.$$

Pour l'énergie potentielle, on peut l'exprimer en fonction de ϕ en prenant comme référence $V(\phi = 0) = 0$. Ainsi, $z = h = \ell - \ell \cos \phi = \ell(1 - \cos \phi)$, et il vient :

$$V(\phi) = mg\ell (1 - \cos \phi) .$$

Les positions d'équilibre sont données par

$$V'(\phi) = 0 \implies mg \sin \phi = 0 \implies \phi = 0 \text{ ou } \pi .$$

Par ailleurs, comme $V''(\phi) = mg \cos \phi$, on a :

$$V''(\phi = 0) > 0 \text{ donc } \phi = 0 \text{ est un équilibre stable ;}$$

$$V''(\phi = \pi) < 0 \text{ donc } \phi = \pi \text{ est un équilibre instable.}$$

La période des oscillations autour de la position d'équilibre s'obtient en suivant le même raisonnement que précédemment :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 + mg\ell (1 - \cos \phi) = E .$$

Pour un mouvement d'amplitude ϕ_1 , $E = mg\ell (1 - \cos \phi_1)$ et

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2mg\ell}{m\ell^2} (\cos \phi - \cos \phi_1) \implies \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_1} ,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_1}} = dt .$$

La période est égale à 4 fois le temps pour aller de $\phi = 0$ à $\phi = \phi_1$, d'où :

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_1}} .$$

C'est une intégrale dite intégrale elliptique de première espèce qui n'a pas de solution compacte simple. Le résultat dépend de ϕ_1 , et pour ϕ_1 petit il prend la forme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\phi_1^2}{16} + \dots \right) .$$

On retrouve le résultat $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ pour les petites oscillations, mais la période dépend de l'amplitude des oscillations, contrairement au cas du ressort.

a. Attention : on est en coordonnées cylindriques et z est perpendiculaire au plan du pendule donc $\dot{z} = 0$.

Remarque. S'il n'est pas possible de définir une énergie potentielle, on peut toujours discuter les positions d'équilibre et leur stabilité en vérifiant que la variable qui définit l'équilibre satisfait une équation différentielle du type $\ddot{x} = -\alpha x$. Si $\alpha < 0$, l'équilibre est instable. Si $\alpha > 0$, l'équilibre est stable, et le mouvement est périodique de fréquence $\omega = \sqrt{\alpha}$.

V. Frottements et théorème de l'énergie

Supposons qu'un système soit soumis à des forces conservatives et des forces non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$K_2 - K_1 = \mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{12}^C + \mathcal{W}_{12}^{NC},$$

où $\mathcal{W}_{12}^C$ est le travail des forces conservatives et $\mathcal{W}_{12}^{NC}$ le travail des forces non conservatives.

Or, le travail des forces conservatives s'exprime à l'aide d'une énergie potentielle :

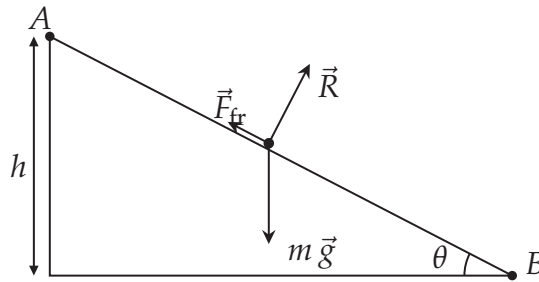
$$\mathcal{W}_{12}^C = V_1 - V_2 \implies K_2 + V_2 - K_1 - V_1 = \mathcal{W}_{12}^{NC},$$

soit donc

$$E_2 - E_1 = \mathcal{W}_{12}^{NC}.$$

La variation d'énergie mécanique $E = K + V$ est égale au travail des forces non conservatives.

Exemple. Un lugeur part d'une hauteur h sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. On se propose de trouver sa vitesse finale v en fonction du coefficient de frottement μ_c .



On a déjà vu que $\|\vec{R}\| = mg \cos \theta$, et donc que $\|\vec{F}_{\text{fr}}\| = mg \mu_c \cos \theta$. L'intensité et la direction de $\vec{F}_{\text{fr}}$ sont constantes pour ce parcours, et donc

$$\mathcal{W}^{\text{fr}} = \vec{F}_{\text{fr}} \cdot \vec{AB} = -mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} \mu_c = -mg \frac{h}{\tan \theta} \mu_c.$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle est donnée par $V = mgh$ au départ et 0 à l'arrivée.

Finalement, $K_A = 0$, $K_B = \frac{1}{2}mv^2$, $V_A = mgh$ et $V_B = 0$ donc

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = -mg \frac{h}{\tan \theta} \mu_c \implies \frac{1}{2}mv^2 = mgh \left(1 - \frac{\mu_c}{\tan \theta}\right),$$

d'où finalement

$$v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu_c}{\tan \theta}\right)}.$$

Remarques.

1. En l'absence de frottements ($\mu_c = 0$), on retrouve $v = \sqrt{2gh}$.
2. Les frottements diminuent la vitesse finale.
3. La condition $1 - \frac{\mu_c}{\tan \theta} > 0$ est équivalente à $\tan \theta > \mu_c$. Or, pour que le mouvement démarre, il faut que $\tan \theta > \mu_s$, où μ_s est le coefficient de frottement statique, et on a de façon générale $\mu_s > \mu_c$. Donc la condition $\tan \theta > \mu_c$ est bien vérifiée.

Moment cinétique et force centrale, gravitation

« Le moins de péché possible, c'est la loi de l'homme. Pas de péché du tout est le rêve de l'ange. Tout ce qui est terrestre est soumis au péché. Le péché est une gravitation. »

— Victor Hugo

Dans un mouvement rectiligne uniforme, la vitesse est constante. Dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un point O , la vitesse n'est pas conservée, mais il y a néanmoins une quantité conservée. En effet, si $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{a}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{a} \parallel \vec{r}} = \vec{0}.$$

Cela suggère d'introduire, à côté de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés du moment cinétique, et d'en déduire la solution générale du problème d'un point matériel soumis à une force centrale, avec application à la gravitation.

I. Moment cinétique

Définition (Moment cinétique). Le **moment cinétique** par rapport à un point O d'un point M ayant la vitesse $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Si O est l'origine du repère, on note $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, et le moment cinétique est simplement noté

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v}.}$$

On peut définir le moment cinétique par rapport à n'importe quel point. Dans ce cas, on a

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \vec{L}_O.$$

En effet,

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Définition (Moment d'une force). On définit de façon similaire le **moment d'une force** s'appliquant au point M par rapport à un point O par

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

Le moment d'une force par rapport à un point O mesure sa capacité à faire tourner le point matériel qui est soumis à cette force autour de ce point. En particulier, si $\vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}$, le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est nul.

Théorème (Théorème du moment cinétique). La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point O est égale au moment par rapport au point O de la somme $\vec{F}$ des forces appliquées au point matériel :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du principe fondamental :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \implies \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0 \text{ car } \vec{v} \parallel \vec{p}} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\vec{F}}.$$

II. Mouvement à force centrale

Définition. Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** si elle pointe toujours en direction d'un même point O : $\vec{F}(M) \parallel \overrightarrow{OM}$.

Exemples.

1. La force de gravitation exercée par une particule sur une autre est une force centrale centrée sur la particule. Si l'on prend la position de la particule qui exerce la force comme centre du repère en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{F} = -\frac{C}{r^2} \vec{e}_r.$$

2. La force exercée par un ressort attaché en un point O est aussi une force centrale. Si le ressort peut prendre n'importe quelle direction, la force est donnée par

$$\vec{F} = k(\ell_0 - r) \vec{e}_r,$$

où ℓ_0 est la longueur au repos du ressort.

Proposition. Si une force centrale est conservative, le potentiel associé ne dépend que de r .

Complément (Démonstration). Considérons un potentiel $V(r, \theta, \phi)$. Son gradient en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi.$$

Pour s'en convaincre, considérons V comme fonction de $\vec{r}(t)$. En cartésiennes,

$$\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{v}.$$

En sphériques,

$$\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{v}.$$

Sachant que $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$, $\vec{\nabla} V \cdot \vec{v}$ redonnera l'expression $\frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi}$ si $\vec{\nabla} V$ est donné par l'expression annoncée.

Ainsi, pour que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ soit proportionnel à $\vec{e}_r$, il faut que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

donc que V ne dépende que de r .

Pour la gravitation, nous avons déjà vu que

$$V(r) = -\frac{C}{r},$$

en accord avec $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$. Pour le ressort, on a de même

$$V(r) = \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2.$$

Théorème. Si un point matériel est soumis à une force centrale de centre O , son moment cinétique par rapport à O est constant.

Démonstration. On a simplement

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = 0$$

puisque, par hypothèse, $\vec{F} \parallel \vec{OM}$.

Dans ce cas, le moment cinétique est une intégrale première (ou plus exactement un ensemble de 3 intégrales premières, chaque composante étant conservée).

III. Solution générale du mouvement à force centrale dérivant de $V(r)$

Lorsqu'un point matériel est soumis à une force centrale, le mouvement possède un certain nombre de propriétés générales.

1. Le mouvement se fait dans un plan. En effet, $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{OM}$, ce qui implique, si $\vec{L}$ est constant, que $\vec{OM}$ est perpendiculaire à la direction de $\vec{L}$, donc que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant O .
2. Si on se place en coordonnées sphériques avec l'axe $Oz \parallel \vec{L}$ et l'angle $\theta = \pi/2$, ou de façon équivalente en coordonnées polaires dans le plan où se situe le mouvement, on a donc :

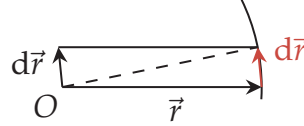
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{r} = r \vec{e}_r \\ \implies \vec{L} &= m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) \\ \implies \vec{L} &= m r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z, \quad \|\vec{L}\| = L = m r^2 \dot{\phi}. \end{aligned}$$

3. Le mouvement suit la **loi des aires** :

« La surface balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps est constante. »

En effet, si l'on définit l'aire balayée $d\mathcal{A}$ par la norme de $d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{r}$, c'est-à-dire la moitié de la surface du parallélogramme engendré par $\vec{r}$ et $d\vec{r}$, on a

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2m} \|\vec{r} \wedge \vec{p}\| = \frac{1}{2m} \|\vec{L}\| = \frac{L}{2m} = \text{cte.}$$



4. **Conservation de l'énergie** : l'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2.$$

L'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle $V(r)$ est conservée :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + V(r) = E = \text{cte.}$$

Mais $mr^2\dot{\phi} = L = \text{cte}$:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + V(r) = E.$$

C'est un mouvement unidimensionnel dans un **potentiel effectif** donné par

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + V(r).$$

C'est la forme de ce potentiel effectif qui doit être utilisée pour discuter la nature générale du mouvement (points d'équilibre, stabilité, etc.)

Complément (Equation générale de la trajectoire). Le long de la trajectoire, on peut considérer que $\phi(t)$ est en fait une fonction de $r(t)$, $\phi(r(t))$, d'où

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dt} \implies \frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}.$$

Or,

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \quad \text{et} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} \implies \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2 \sqrt{2m (E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

On en déduit que

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{L dr'}{r'^2 \sqrt{2m (E - V_{\text{eff}}(r'))}} + \phi_0.$$

C'est l'équation générale de la trajectoire pour un mouvement central.

IV. Problème de Kepler

Le problème de Kepler correspond à la gravitation, avec

$$V(r) = -\frac{C}{r}, \quad C > 0.$$

Le potentiel effectif est donné par

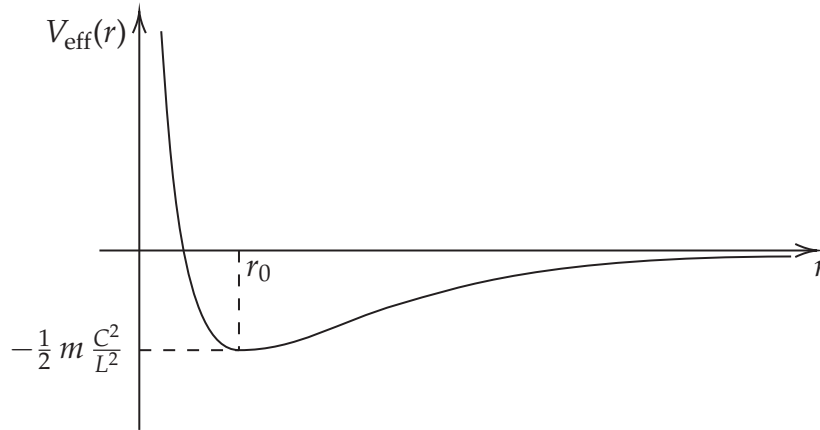
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} - \frac{C}{r}.$$

Il diverge vers le haut quand $r \rightarrow 0$, il tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$, et il passe par un minimum quand

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{C}{r^2} = 0 \implies r_0 = \frac{L^2}{mC}.$$

En ce point,

$$V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{mC^2}{L^2}.$$



Le mouvement n'est possible que si

$$E \geq -\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2}.$$

Il y a trois cas de figure :

- si $E = -\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2}$, $\dot{r} = 0$ et le mouvement est circulaire ;
- si $-\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2} < E < 0$, le mouvement oscille entre deux rayons r_1 et r_2 ;
- si $E \geq 0$, le point matériel part à l'infini.

Complément. Pour trouver les trajectoires, on peut utiliser la formule générale donnée par une intégrale (exercice), mais il est plus simple de décrire la trajectoire par

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}.$$

Ainsi,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{L}{m} u^2 = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\phi},$$

ce qui permet de réécrire l'énergie sous la forme

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] - Cu.$$

Comme l'énergie mécanique est constante, la dérivée de cette expression par rapport à ϕ doit être constante, d'où

$$\frac{L^2}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{du}{d\phi} + \frac{L^2}{m} u \frac{du}{d\phi} - C \frac{du}{d\phi} = 0,$$

soit donc

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{Cm}{L^2}}.$$

La solution générale de cette équation différentielle est bien connue. C'est la somme de la solution générale

$$u = A \cos(\phi - \phi_0)$$

et d'une solution particulière

$$u = \frac{Cm}{L^2}.$$

Si l'on pose $p = \frac{L^2}{Cm}$ et $e = Ap$, il vient

$$u = \frac{e \cos(\phi - \phi_0) + 1}{p},$$

soit donc

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}.$$

Il s'agit de l'équation en coordonnées polaires d'une **conique** :

- si $e = 0$, c'est un cercle ;
- si $0 < e < 1$, c'est une ellipse ;
- si $e = 1$, c'est une parabole ;
- si $e > 1$, c'est une hyperbole.

L'énergie mécanique est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] - Cu \quad \text{avec} \quad \frac{du}{d\phi} = +\frac{e}{p} \sin(\phi - \phi_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left[\frac{e^2}{p^2} \sin^2(\phi - \phi_0) + \frac{e^2}{p^2} \cos^2(\phi - \phi_0) + 2 \frac{e}{p^2} \cos(\phi - \phi_0) - \frac{1}{p^2} \right] \\ &\quad - C \frac{e}{p} \cos(\phi - \phi_0) - \frac{C}{p} \\ &= \frac{1}{2} Cp \left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{2e}{p^2} \cos(\phi - \phi_0) + \frac{1}{p^2} \right] - \frac{Ce}{p} \cos(\phi - \phi_0) - \frac{C}{p} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{C}{p} + \frac{1}{2} C \frac{e^2}{p}, \end{aligned}$$

soit donc

$$E = -\frac{C}{2p} (1 - e^2).$$

Si $e < 1$, $E < 0$: le mouvement doit être limité entre deux longueurs, ce qui est compatible avec une ellipse. Par contre, si $e \geq 1$, le mouvement n'est pas fermé. e est appelée l'**excentricité de la conique**.

V. Les lois de Kepler

Historiquement, Kepler a compris le mouvement des planètes avant que Newton ne formule ses lois, et ce sur la base des observations de son maître Tycho Brahé. Ces lois peuvent être formulées de la façon suivante.

Loi 1 (1^{re} loi de Kepler). Les trajectoires des planètes sont des ellipses, dont le Soleil est un foyer.

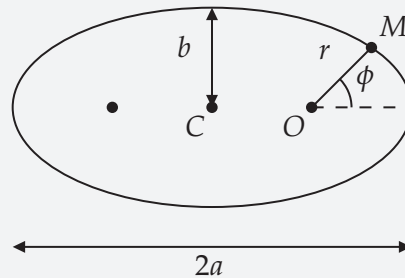
Loi 2 (2^e loi de Kepler). Le rayon-vecteur du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des temps égaux.

Loi 3 (3^e loi de Kepler). Si l'on désigne par T la période et a le demi-grand axe de l'ellipse, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes.

Ce sont en grande partie ces lois qui ont amené Newton à sa formulation de la gravitation. Dans ces notes, nous faisons le chemin inverse et démontrons que ces lois sont des conséquences de la gravitation.

Complément (Démonstration des lois de Kepler). Commençons par la première. Si une planète tourne autour du soleil, c'est que $e < 1$, et la trajectoire est une ellipse. L'origine du repère est ce que l'on appelle un **foyer**. Si l'on prend $\phi_0 = 0$, l'équation est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}.$$



Calculons le demi-grand axe a et le demi-petit axe b en supposant qu'il s'agit bien d'une ellipse :

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{e \sin \phi}{(1 + e \cos \phi)^2} = 0 \quad \text{pour } \phi = 0, \pi,$$

on en déduit

$$2a = \underbrace{r(\phi = 0)}_{\min} + \underbrace{r(\phi = \pi)}_{\max} = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = p \left(\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{1 - e} \right) = p \frac{2}{1 - e^2},$$

soit finalement

$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

La coordonnée cartésienne y a pour valeur maximale b . Or,

$$y(\phi) = r \sin \phi = \frac{p \sin \phi}{1 + e \cos \phi} \implies \frac{dy}{d\phi} = p \frac{(1 + e \cos \phi) \cos \phi - \sin \phi (-e \sin \phi)}{(1 + e \cos \phi)^2},$$

d'où

$$\frac{dy}{d\phi} = 0 \implies (1 + e \cos \phi) \cos \phi + e \sin^2 \phi = 0 \implies \cos \phi + e = 0 \implies \cos \phi = -e.$$

Pour cette valeur de ϕ ,

$$y = \frac{p}{1 - e^2} \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{p}{1 - e^2} \sqrt{1 - e^2},$$

soit finalement

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Si l'on définit des coordonnées cartésiennes d'origine C, que l'on appelle X et Y, on a

$$X = x + a - r(\phi = 0) = x + \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p}{1 + e} = x + \frac{ep}{1 - e^2},$$

soit

$$X = x + ea \quad Y = y.$$

Proposition. X et Y sont reliés par

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Démonstration. On a le développement suivant :

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos \phi} \\ r + \underbrace{re \cos \phi}_{=ex} &= a(1 - e^2) \\ r &= a(1 - e^2) - ex \\ r^2 &= a^2(1 - e^2)^2 + e^2x^2 - 2a(1 - e^2)ex \\ x^2 + y^2 - e^2x^2 + 2ea(1 - e^2)x &= a^2(1 - e^2)^2 \\ x^2(1 - e^2) + y^2 + 2eax(1 - e^2) &= a^2(1 - e^2)^2 \\ x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} + 2aex &= a^2(1 - e^2) \\ (x + ea)^2 - e^2a^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= a^2 - a^2e^2 \\ (x + ea)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= a^2 \\ \frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} &= 1 \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

La deuxième loi est tout simplement la loi des aires, qui est valable pour tout mouvement à force centrale.

Démontrons la troisième loi : D'après la loi des aires, $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$. En intégrant sur une période T, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dA}{dt} dt &= T \frac{L}{2m} \\ \Rightarrow A(T) - A(0) &= T \frac{L}{2m} \\ \Rightarrow \pi ab &= T \frac{L}{2m} \\ \Rightarrow T &= \pi ab \frac{2m}{L} \end{aligned}$$

puisque l'aire de l'ellipse est égale à πab . Mais

$$p = \frac{L^2}{Cm} \Rightarrow L = \sqrt{Cmp} \quad \text{et} \quad p = a(1 - e^2) \Rightarrow L = \sqrt{Cm(1 - e^2)} \sqrt{a},$$

donc

$$T = \pi a \underbrace{\sqrt{1 - e^2}}_{=b} \frac{2m}{\sqrt{Cm(1 - e^2)}} \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{\frac{3}{2}} 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{C}.$$

Mais la constante est $C = GMm$, où M est la masse du Soleil et m la masse de la planète. Finalement, on a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

qui est bien indépendant de m .

Remarque : L'énergie mécanique prend une forme très simple en fonction du demi grand axe :

$$E = -\frac{C}{2a}.$$

Changement de référentiel, dynamique terrestre

« *E pur si moeve.* »

— Galileo Galilei

I. Référentiels et repères

Comme défini au premier chapitre, un **référentiel** est défini par la donnée de quatre points non coplanaires dont les distances mutuelles restent constantes, et par extension de tous les points dont les distances mutuelles à ces quatre points restent constantes. Des exemples de référentiel souvent utilisés sont les suivants.

Exemples.

- Un solide.
- Le référentiel terrestre (ou du laboratoire).
- Le référentiel géocentrique ou de Ptolémée, défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes.
- Le référentiel héliocentrique ou de Kepler, défini par le centre du Soleil et trois étoiles fixes.

On définit aussi la notion de **repère**.

Définition. Un repère est défini par la donnée d'un point de l'espace et de trois vecteurs non coplanaires. En général, on utilise des **repères orthonormés directs** (vecteurs orthogonaux de norme 1, troisième vecteur égal au produit vectoriel des deux premiers).

Un repère est dit **lié** au référentiel $\mathcal{R}$ si son origine et ses vecteurs ne bougent pas par rapport à $\mathcal{R}$. À un repère, on ne peut associer qu'un seul référentiel auquel il est lié. Par contre, on peut définir une infinité de repères liés à un référentiel en changeant l'origine et l'orientation des vecteurs.

II. Changement de référentiel

Considérons deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Soient $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère lié à $\mathcal{R}$ et $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère lié à $\mathcal{R}'$.

La position d'un point matériel M est repérée dans $\mathcal{R}$ par

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

et dans $\mathcal{R}'$ par

$$\overrightarrow{O'M} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

La vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par

$$\vec{v}_M = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$$

et la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$ est définie par

$$\vec{v}'_M = \dot{a}_1 \vec{e}_1 + \dot{a}_2 \vec{e}_2 + \dot{a}_3 \vec{e}_3.$$

De même, l'accélération par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par

$$\vec{a}_M = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

et l'accélération par rapport à $\mathcal{R}'$ est définie par

$$\vec{a}'_M = \ddot{a}_1 \vec{e}_1 + \ddot{a}_2 \vec{e}_2 + \ddot{a}_3 \vec{e}_3.$$

Comment ces vitesses et ces accélérations sont-elles reliées entre elles ?

Pour répondre à cette question, il suffit d'observer que le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est entièrement défini par deux vecteurs :

- $\vec{v}_{O'}$, la vitesse de O' par rapport à $\mathcal{R}$;
- $\vec{\omega}$, le vecteur rotation qui décrit l'évolution temporelle des vecteurs $\mathbf{e}_i$:

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{e}_i.$$

On en déduit les relations suivantes. D'abord pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &\equiv \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \\ &= \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt} (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \\ &= \vec{v}_{O'} + \dot{a}_1 \vec{e}_1 + a_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \dot{a}_2 \vec{e}_2 + a_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \dot{a}_3 \vec{e}_3 + a_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + a_1 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 + a_2 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 + a_3 \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}, \end{aligned}$$

soit finalement

$$\underbrace{\vec{v}_M}_{\text{vitesse « absolue »}} = \underbrace{\vec{v}'_M}_{\text{vitesse « relative »}} + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse « d'entraînement »}} = \vec{v}'_M + \vec{v}_{eM}.$$

La vitesse d'entraînement correspond à la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point immobile dans $\mathcal{R}'$ confondu avec M à l'instant t .

Remarque. Si $\mathcal{R}'$ est simplement en translation par rapport à $\mathcal{R}$ ($\vec{\omega} = \vec{0}$), on a le résultat intuitif

$$\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'},$$

simple translation du vecteur vitesse.

Pour l'accélération, on a

$$\begin{aligned} \vec{a}_M &\equiv \frac{d}{dt} \vec{v}_M = \frac{d}{dt} (\vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{v}_{O'}}_{=\vec{a}_{O'}} + \frac{d}{dt} (\dot{a}_1 \vec{e}_1 + \dot{a}_2 \vec{e}_2 + \dot{a}_3 \vec{e}_3) + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{a}_1 \vec{e}_1 + \dot{a}_2 \vec{e}_2 + \dot{a}_3 \vec{e}_3) &= \ddot{a}_1 \vec{e}_1 + \ddot{a}_2 \vec{e}_2 + \ddot{a}_3 \vec{e}_3 + \dot{a}_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \dot{a}_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \dot{a}_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \\ &= \vec{a}'_M + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'_M \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \\ &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \\ &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}), \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\underbrace{\vec{a}_M}_{\text{accélération « absolue »}} = \underbrace{\vec{a}'_M}_{\text{« relative »}} + \underbrace{\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\text{« d'entraînement »}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_M}_{\text{« complémentaire »}}.$$

L'accélération complémentaire est aussi appelée accélération de Coriolis. On a alors

$$\vec{a}_M = \vec{a}'_M + \vec{a}_{eM} + \vec{a}_{CM}.$$

Remarques.

1. L'expression des vitesses et des accélérations en coordonnées cylindriques et sphériques peuvent être vues comme des applications de ces relations en considérant comme référentiel relatif :

- le référentiel $\mathcal{R}'$ auquel le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ est lié pour les coordonnées cylindriques ;
- le référentiel $\mathcal{R}'$ auquel le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ est lié pour les coordonnées sphériques.

Comme l'origine O est la même que pour le référentiel absolu, il n'y a pas de termes $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{a}_{O'}$, et les autres termes calculés pour $O' = O$ redonnent exactement les formules vues précédemment en coordonnées cylindriques et sphériques.

2. Le terme $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ est parfois appelé **accélération centripète**. En effet, si

$$\overrightarrow{O'M} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z,$$

alors

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \rho \omega \vec{e}_\phi \implies \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = -\rho \omega^2 \vec{e}_\rho.$$

III. Principe fondamental dans un référentiel quelconque

Supposons que le référentiel $\mathcal{R}$ soit un référentiel dans lequel la première loi de Newton s'applique. Un tel référentiel est appelé **référentiel inertiel**. Dans un tel référentiel, la deuxième loi de Newton prend la forme

$$m \vec{a}_M = \vec{F},$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées. Qu'en est-il dans un référentiel quelconque ?

D'après ce qui précède, on a

$$m \vec{a}'_M + m \vec{a}_{eM} + m \vec{a}_{CM} = \vec{F} \implies m \vec{a}'_M = \vec{F} - m \vec{a}_{eM} - m \vec{a}_{CM},$$

ou encore

$$m \vec{a}'_M = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC},$$

où $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{eM}$ est la force d'inertie d'entraînement et $\vec{F}_{iC} = -m \vec{a}_{CM}$ est la force de Coriolis. De façon plus détaillée, ces forces supplémentaires prennent la forme

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{O'} - m \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{iC} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'_M.$$

Cas particulier. Si le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire si $\vec{v}_{O'}$ est constante et $\vec{\omega} = \vec{0}$, alors $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$ et

$$\vec{F}_{ie} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{iC} = \vec{0}.$$

Dans un tel référentiel, la deuxième loi de Newton prend la même forme que dans un référentiel d'inertie :

$$m \vec{a}'_M = \vec{F},$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées. Un tel référentiel est dit **galiléen**.

Remarque. Le terme $-m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ est parfois appelé **force centrifuge**. En effet, il est opposé à l'accélération centripète, et il pointe donc vers l'extérieur.

IV. Référentiels en translation non uniforme

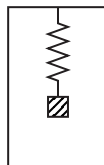
Si un référentiel est simplement en translation par rapport à un autre, $\vec{\omega} = \vec{0}$ (et bien sûr $\vec{\alpha} = \vec{0}$), et les formules se réduisent à

$$\begin{cases} \vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'} \\ \vec{a}_M = \vec{a}'_M + \vec{a}_{O'} \end{cases}$$

avec $\vec{a}_{O'} \neq \vec{0}$ si la translation n'est pas uniforme. La présence de cette accélération donne lieu à des forces d'inertie aux conséquences parfois déroutantes. Voyons-le sur quelques exemples.

1. Ressort dans un ascenseur

Un ressort est accroché à un ascenseur soumis à une accélération $\vec{a}$. Quel est l'allongement produit par une masse m ?



Dans le référentiel de l'ascenseur, la masse est soumise à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m \vec{g}$;
- la force de rappel du ressort

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z;$$

— la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}.$$

Dans le référentiel de l'ascenseur, l'équation du mouvement de la masse est donc donnée par

$$m \vec{a}'_m = m \vec{g} + k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z - m \vec{a}.$$

À l'équilibre, $\vec{a}'_m = \vec{0}$, donc

$$m \vec{g} + k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z - m \vec{a} = \vec{0}.$$

Projetons sur $\vec{e}_z$:

$$\vec{g} \cdot \vec{e}_z = -g \quad \text{et} \quad \vec{a} \cdot \vec{e}_z = a,$$

ce qui mène à

$$k(\ell - \ell_0) = m(g + a),$$

et donc finalement

$$\ell - \ell_0 = \frac{m}{k}(g + a).$$

Si $a > 0$, alors l'allongement est plus grand. Si $a = -g$, l'allongement est nul : l'ascenseur et le ressort sont en chute libre.

Remarque. On peut retrouver le même résultat dans le référentiel du laboratoire. L'équation du mouvement est donnée par

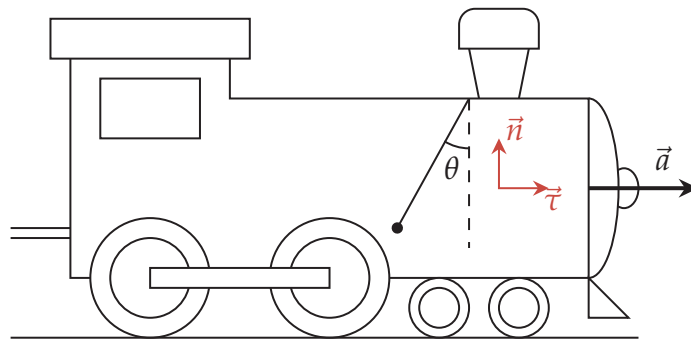
$$m \vec{a}_m = \vec{P} + k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z,$$

et la condition d'équilibre correspond à $\vec{a}_m = \vec{a}$ (la masse a la même accélération que l'ascenseur), d'où

$$m \vec{a} = \vec{P} + k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z.$$

C'est la même équation, mais la condition d'équilibre est moins intuitive.

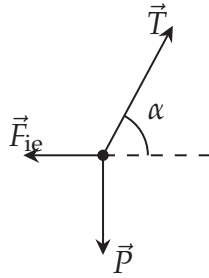
2. Pendule dans un train



Que vaut l'angle θ à l'équilibre ?

Dans le référentiel du wagon, la masse est soumise à trois forces :

- son poids $\vec{P}$;
- la tension du fil $\vec{T}$;
- la force d'inertie $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}$.



À l'équilibre, $\vec{a}' = \vec{0}$:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}.$$

Projetons d'abord sur $\vec{\tau}$ (horizontal), en nommant α l'angle entre $\vec{T}$ et $\vec{\tau}$:

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{\tau}}_{=0} + \vec{T} \cdot \vec{\tau} + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{\tau} = 0 \implies T \cos \alpha - ma = 0.$$

Or, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ donc $\cos \alpha = \sin \theta$:

$T \sin \theta = ma.$

Projetons maintenant sur $\vec{n}$ (vertical) :

$$\vec{P} \cdot \vec{n} + \vec{T} \cdot \vec{n} + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{n} = 0 \implies -mg + T \cos \theta = 0 \implies T \cos \theta = mg \implies T = \frac{mg}{\cos \theta}.$$

La première équation conduit à

$$mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = ma,$$

soit finalement

$\tan \theta = \frac{a}{g}.$

De nouveau, on peut bien sûr résoudre le problème dans le référentiel du laboratoire en écrivant que l'accélération à l'équilibre est égale à $\vec{a}$.

3. Pendule dans un train sur un plan incliné

On suppose cette fois que le wagon glisse sans frottement sur un plan incliné. Quelle est l'orientation du pendule ?

Procédons en deux étapes.

- a) L'ensemble wagon + pendule a la masse $M + m$, et il est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$:

$$(M + m) \vec{a} = (M + m) \vec{g} + \vec{R} \quad \text{soit} \quad \vec{R} = (M + m) (\vec{a} - \vec{g}).$$

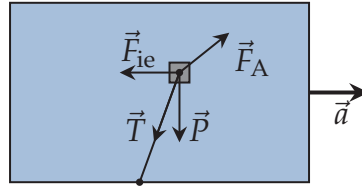
- b) Dans le référentiel du wagon, le pendule est soumis à trois forces : son poids $m \vec{g}$, la tension $\vec{T}$ et la force d'inertie $-m \vec{a}$. À l'équilibre,

$$m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{a} = \vec{0} \implies \vec{T} = m (\vec{a} - \vec{g}).$$

$\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{R}$ donc il est perpendiculaire au plan incliné. Le pendule est perpendiculaire au plafond du train !

4. Accéléromètre à main

Un objet flotte en suspension dans un liquide plus dense que lui. Il est attaché à la base du récipient. On accélère le récipient avec une accélération $\vec{a}$. Quelle direction prend le fil ?



Plaçons-nous dans le référentiel en mouvement, et appelons M la masse du fluide déplacé. Ce volume serait soumis à la force

$$M \vec{g} - M \vec{a}.$$

Ainsi, la force d'Archimède exercée par le fluide sur l'objet est

$$\vec{F}_A = -M \vec{g} + M \vec{a}.$$

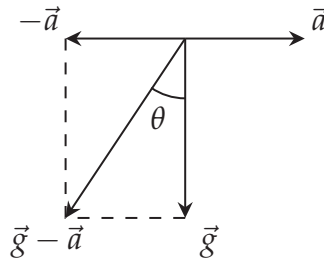
L'objet est soumis à quatre forces, dont la somme est nulle à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_A = \vec{0},$$

soit

$$m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{a} - M \vec{g} + M \vec{a} = \vec{0} \implies \vec{T} = (M - m) (\vec{g} - \vec{a}),$$

avec $M - m > 0$ puisque le fluide est plus dense que l'objet. Donc la tension est orientée selon $\vec{g} - \vec{a}$.



Le fil penche donc dans la direction de $\vec{a}$! L'angle θ est donné par

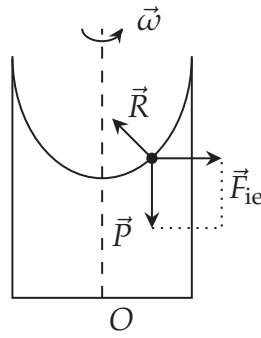
$$\tan \theta = \frac{a}{g}.$$

V. Référentiels en rotation uniforme

Les deux forces d'inertie, la force centrifuge et la force de Coriolis, ont des effets très intuitifs sur deux exemples.

1. Liquide en rotation

Une goutte à la surface est au repos dans le référentiel tournant.

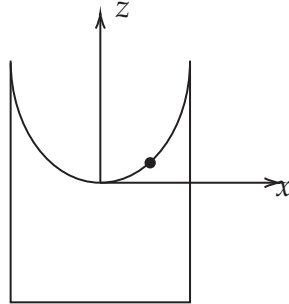


Elle est soumise à trois forces :

$$\vec{P} + \vec{R} - \underbrace{m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}_{= \vec{F}_{\text{cent}} : \text{force centrifuge}} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{au repos}}$$

Comme $\vec{R}$ est perpendiculaire à la surface, on en déduit que la surface est perpendiculaire au vecteur $\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}}$:

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ -mg \end{pmatrix}.$$



Or, le vecteur $\vec{t}$ de composantes $(1, z'(x))$ est tangent à courbe. En effet, si on appelle A le point de coordonnées $(x, z(x))$ et B le point de coordonnées $(x + \varepsilon, z(x + \varepsilon))$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ devient tangent à la courbe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(\varepsilon, z(x + \varepsilon) - z(x))$. Il est proportionnel au vecteur $\vec{t}(\varepsilon)$ de composantes $(1, (z(x + \varepsilon) - z(x))/\varepsilon)$ qui tend vers $\vec{t}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

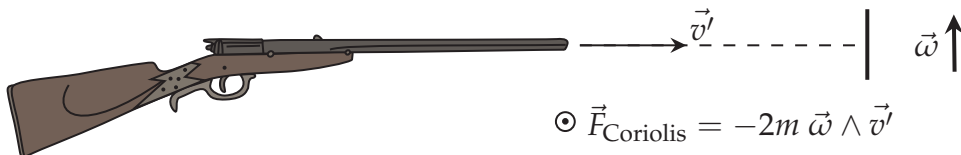
On en déduit :

$$\vec{t} \cdot (\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}}) = 0 \implies m\omega^2 x - mgz'(x) = 0 \implies z'(x) = \frac{\omega^2}{g} x \implies \boxed{z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2.}$$

Le liquide forme un **paraboloïde de révolution**.

2. Fusil tournant

Imaginons un fusil tirant une balle à l'horizontale tout en tournant autour d'un axe vertical.



La balle est déviée par la force de Coriolis.

VI. Dynamique terrestre

La Terre n'est pas un référentiel d'inertie. En première approximation, on peut considérer qu'elle tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de l'axe de ses pôles par rapport à un référentiel d'inertie, le référentiel de Ptolémée (ou référentiel géocentrique).

Dans le référentiel de la Terre, le mouvement est régi par l'équation

$$m \vec{a} = \vec{F} + m \vec{g} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v},$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces extérieures (sauf le poids) et

$$\vec{g} = \vec{g}^{\text{grav}}(\vec{r}) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

avec

$$\vec{g}^{\text{grav}}(\vec{r}) = -g(r) \vec{e}_r$$

le champ de gravitation, où $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$ est mesuré par rapport au centre de la Terre C . Cette équation est une conséquence du fait que C est immobile et que $\vec{\omega}$ est constant.

Le champ de gravitation apparent $\vec{g}$ est appelé **champ de pesanteur**. Son orientation par rapport à $\vec{g}^{\text{grav}}(\vec{r})$ dépend de la latitude λ . On a

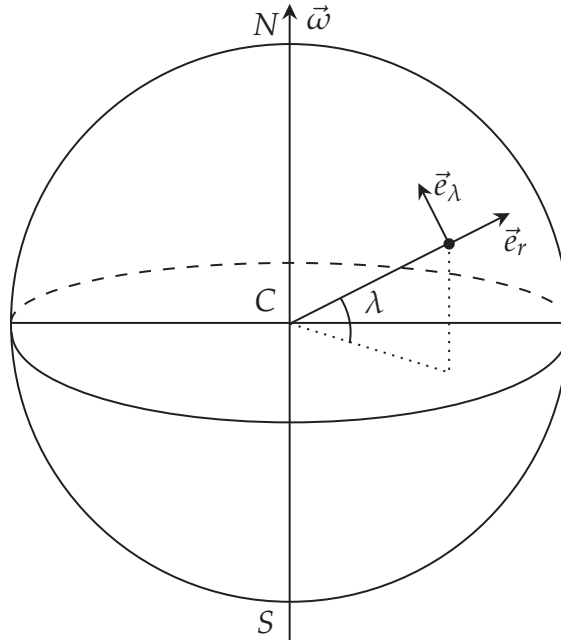
$$\vec{\omega} = \omega (\sin \lambda \vec{e}_r + \cos \lambda \vec{e}_\lambda) \quad \text{et} \quad \vec{r} = r \vec{e}_r,$$

donc

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = r\omega \cos \lambda (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r)$$

et

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = r\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) + r\omega^2 \cos^2 \lambda \vec{e}_\lambda \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r).$$



Posons $\vec{e}_3 = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_3 &= -\vec{e}_\lambda & \implies & \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) = \vec{e}_\lambda \\ \vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_3 &= \vec{e}_r & \implies & \vec{e}_\lambda \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) = -\vec{e}_r, \end{aligned}$$

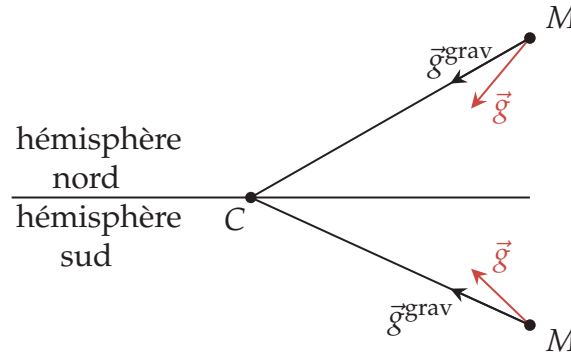
ce qui nous amène à

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = r\omega^2 (-\cos^2 \lambda \vec{e}_r + \sin \lambda \cos \lambda \vec{e}_\lambda)$$

et donc

$$\vec{g} = \vec{g}^{\text{grav}}(\vec{r}) + r\omega^2 (\cos^2 \lambda \vec{e}_r - \sin \lambda \cos \lambda \vec{e}_\lambda) .$$

Le champ de pesanteur n'est pas strictement radial. Il est radial à l'équateur ($\lambda = 0$) et aux pôles ($\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$).



La direction de $\vec{g}$ correspond à celle d'un fil à plomb : $\vec{T} = -m\vec{g}$.

Remarque. Les corrections sont très petites ($\simeq 10^{-3}$).

Si l'on adopte $\vec{g}$ comme le champ de pesanteur, le seul effet de la rotation de la Terre, c'est la force de Coriolis :

$$\vec{F}_C = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v} .$$

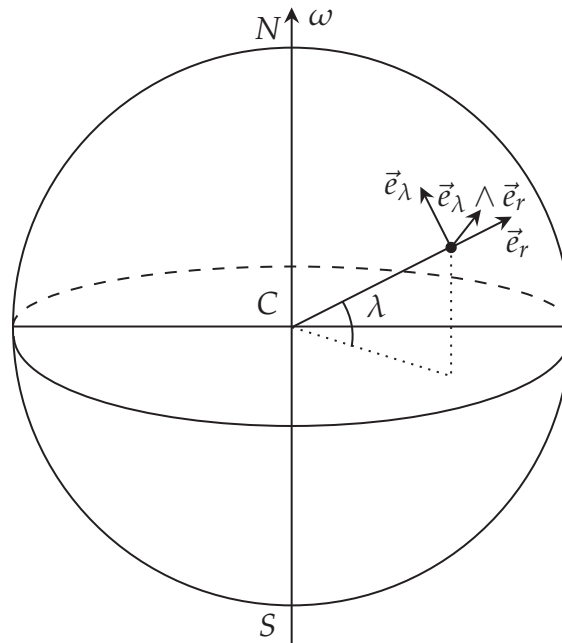
Cette force a plusieurs effets remarquables.

1. Déviation vers l'est

Si un corps tombe à la verticale à la vitesse $\vec{v} = -v \vec{e}_r$, il subit la force de Coriolis :

$$\vec{F}_C = -2m\omega (\sin \lambda \vec{e}_r + \cos \lambda \vec{e}_\lambda) \wedge (-v \vec{e}_r) = 2m\omega v \cos \lambda (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) .$$

Le vecteur $\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r$ est orienté vers l'est.



Un objet qui chute est dévié vers l'est, que la chute ait lieu dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud.

Par ailleurs, comme $\vec{g}$ n'est pas strictement radial, il est dévié vers le sud dans l'hémisphère nord et vers le nord dans l'hémisphère sud.

Remarque. On peut aussi comprendre la déviation vers l'est dans le référentiel géocentrique (centre de la Terre et trois étoiles fixes). L'objet à la hauteur h a une vitesse $(R + h)^2\omega$ (où R est le rayon de la Terre), le point où il devrait tomber une vitesse $R^2\omega$. Lorsqu'on le lâche, cet objet décrit une ellipse dont C est un foyer. D'après la loi des aires,

$$r^2\dot{\phi} = \text{cte.}$$

Au départ, $r = R + h$ et $\dot{\phi} = \omega$. À l'arrivée, $r = R$ et donc $\dot{\phi} > \omega$. Donc, pendant la chute, la vitesse de rotation de l'objet augmente, d'où la déviation vers l'est.

2. Pendule de Foucault

Considérons un pendule qui oscille dans un plan tangent à la Terre. Si le fil est très long et les oscillations petites, on peut considérer qu'il reste dans le plan, et que sa vitesse n'a pas de composante suivant $\vec{e}_r$:

$$\vec{v} = v_\lambda \vec{e}_\lambda + v_3 \vec{e}_3.$$

Plaçons-nous dans un référentiel tournant par rapport à la Terre avec une vitesse

$$\vec{\omega}' = -\omega \sin \lambda \vec{e}_r.$$

La vitesse totale de rotation est la somme des vitesses de rotation (voir démonstration à la fin du chapitre). Elle est donc donnée par

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\omega}' = \omega \cos \lambda \vec{e}_\lambda.$$

Dans ce référentiel, la force de Coriolis est donnée par

$$-2m \vec{\omega}_{\text{tot}} \wedge \vec{v} = -2m\omega \cos \lambda v_3 \underbrace{\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_3}_{=\vec{e}_r}.$$

Cette force est parallèle à $\vec{e}_r$, et elle est compensée par la tension. Donc dans ce référentiel la force de Coriolis est sans effet et les oscillations se font dans un plan.

Dans le référentiel de la Terre, le plan des oscillations tourne donc à la vitesse angulaire

$$\vec{\omega}' = -\omega \sin \lambda \vec{e}_r.$$

Dans l'**hémisphère nord**, $\lambda > 0$, donc $\omega'_r < 0$ et ainsi le pendule tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans l'**hémisphère sud**, $\lambda < 0$, donc $\omega'_r > 0$ et ainsi le pendule tourne dans le sens trigonométrique. La période est donnée par

$$\frac{24}{\sin \lambda} \text{ heures.}$$

Aux pôles, la période est donc de 24 heures. À Lausanne, $\lambda = 46,5^\circ$, la période est $T = 33$ heures. À l'équateur, on a $T \rightarrow +\infty$: il n'y a pas de rotation.

Complément. Loi de composition des vitesses angulaires

On considère 3 référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$. Le mouvement de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ est décrit par $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{\omega}$, et celui de $\mathcal{R}''/\mathcal{R}'$ par $\vec{v}_{O''}$ et $\vec{\omega}'$.

Question : Quels sont les vecteurs décrivant le mouvement de $\mathcal{R}''/\mathcal{R}$?

D'après les règles de changement des vitesses, on a :

$$\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

et

$$\vec{v}'_M = \vec{v}''_M + \vec{v}'_{O''} + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O''M}$$

d'où

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_{O''} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O''M}$$

soit

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}'_{O''} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'O''} + (\vec{\omega} + \vec{\omega}') \wedge \overrightarrow{O''M}.$$

Or, par définition de $\vec{v}_{O''}$ et $\vec{\omega}''$, on a :

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}_{O''} + \vec{\omega}'' \wedge \overrightarrow{O''M}.$$

On en déduit que

$$\vec{v}''_O = \vec{v}'_{O''} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'O''},$$

et que

$$\vec{\omega}'' = \vec{\omega} + \vec{\omega}'.$$

La vitesse angulaire totale est donc la somme des vitesses angulaires relatives.

Système de points matériels

« More is different. »

— Philip Anderson

I. Forces intérieures et forces extérieures

Considérons un ensemble de points matériels de masses m_i et repérés par leur position M_i . Le principe fondamental appliqué au point matériel i s'écrit

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i},$$

où $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ est la somme des forces extérieures appliquées à i et $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ la force exercée par le point j sur le point i .

Définition (Quantité de mouvement totale). La quantité de mouvement totale $\vec{P}$ est définie par

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i.$$

Avec ça, il vient

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

Or, la somme $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$ peut se réécrire comme

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \sum_{(i,j)} (\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i}),$$

où $\sum_{(i,j)}$ signifie qu'on somme sur toutes les paires de particules. Or, d'après la troisième loi de Newton,

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème (Théorème de la quantité de mouvement totale).

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

avec $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$.

De même, pour un point matériel, nous savons que le moment cinétique $\vec{L}_{O,i}$ satisfait

$$\frac{d\vec{L}_{O,i}}{dt} = \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i \quad \text{avec} \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

Si l'on définit le moment cinétique total $\vec{L}_O$ par

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O,i},$$

il vérifie

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

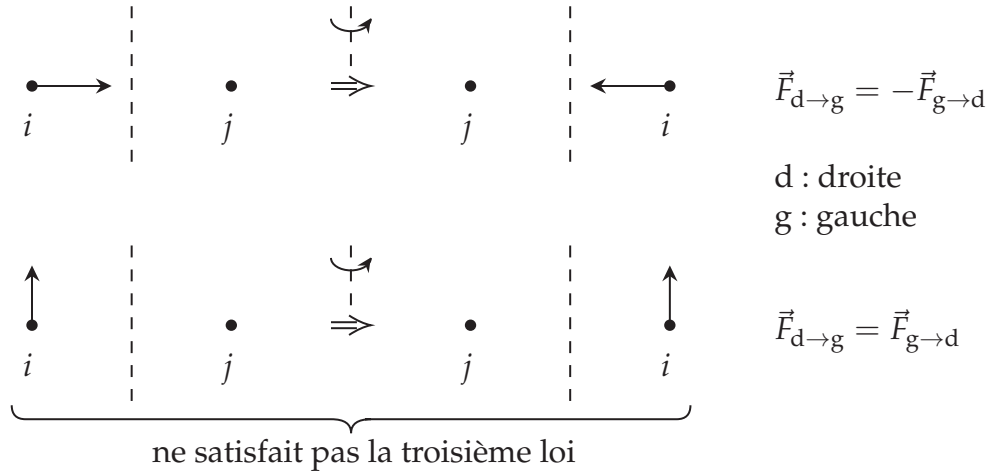
Mais encore une fois, on peut écrire

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \sum_{(i,j)} (\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}),$$

et, comme $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$, on peut écrire

$$\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = (\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_j}) \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

On fait par ailleurs l'hypothèse que les forces $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ et $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ sont parallèles au vecteur $\overrightarrow{M_i M_j}$, ce qu'on peut rendre plausible par des arguments de symétrie si la 3ème loi de Newton est satisfaite.



Ainsi, $\overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$ donc

$$\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0},$$

et donc finalement

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O,i}^{\text{ext}}$$

d'où le théorème :

Théorème (Théorème du moment cinétique total).

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{O,i}^{\text{ext}}$ est le moment des forces extérieures qui s'exercent sur i et $\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}$ la

Remarque. Ce théorème n'est valable que si le point O est un point fixe dans le référentiel considéré. En effet, lorsque nous avons établi le théorème du moment cinétique pour un point matériel, nous avons utilisé le fait que la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ était égale à $\vec{v}_M$, donc que le point O était fixe. Si l'on définit le moment cinétique par rapport à un point mobile, il y a un terme complémentaire. Ce point sera discuté en détail dans le chapitre suivant dédié aux solides indéformables.

II. Statique

Une première application de ces lois concerne les conditions d'équilibre d'un système de points matériels. En effet, si un système ne bouge pas (il est statique), on a

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t) = \vec{cte} \\ \vec{v}_i(t) = \vec{0} \end{cases},$$

d'où

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Cela implique que

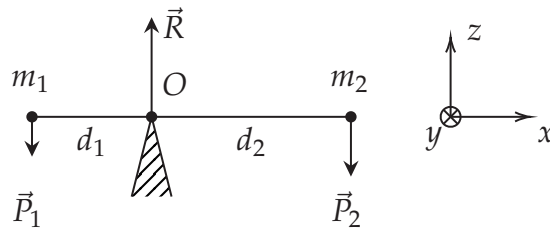
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0},$$

et donc que

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \vec{0}.$$

Si un système est à l'équilibre, la somme des forces extérieures et la somme des moments des forces extérieures sont nulles.

Exemple. Considérons deux masses m_1 et m_2 chacune à une extrémité d'une poutre de masse négligeable elle-même sur un point d'appui. On note d_1 et d_2 les distances au point d'appui. Que valent d_1 et d_2 à l'équilibre ?



À l'équilibre, on a d'abord

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \implies \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{0},$$

mais l'on a aussi

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \implies ?$$

On peut choisir O où l'on veut, mais le plus simple est de choisir O là où s'applique $\vec{R}$:

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \underbrace{\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2.$$

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 &= -d_1 \vec{e}_x \wedge (-m_1 g) \vec{e}_z = -m_1 d_1 g \vec{e}_y \\ \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 &= d_2 \vec{e}_x \wedge (-m_2 g) \vec{e}_z = m_2 d_2 g \vec{e}_y, \end{aligned}$$

donc

$$-m_1 d_1 g + m_2 d_2 g = 0$$

et finalement

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}}.$$

Si $m_1 > m_2$ alors $d_1 < d_2$: c'est logique.

Remarque. Si on avait choisi un point A n'importe où entre m_1 et m_2 , on arriverait au même résultat. En effet,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} &= \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{P}_2 \\ &= \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}_2 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 \\ &= \overrightarrow{AO} \wedge (\underbrace{\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{P}_2}_{=\vec{0}}) + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 \\ &= \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}},\end{aligned}$$

finalement la même condition.

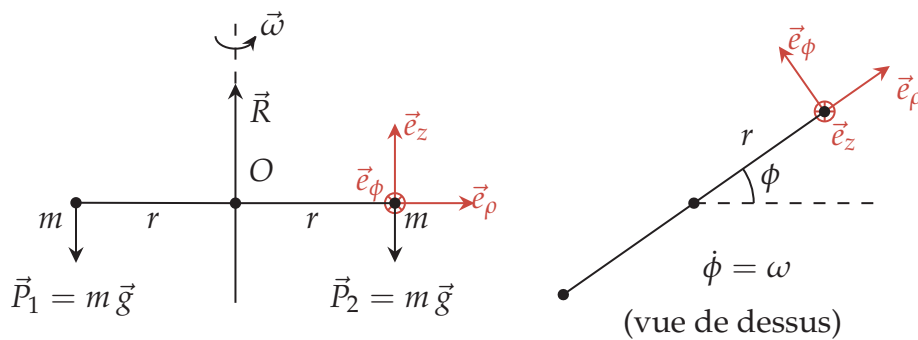
III. Systèmes isolés

Un système est dit isolé si les sommes des forces extérieures et de leurs moments sont nulles. Dans ce cas,

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} & \implies \vec{P} = c\vec{t}\vec{e} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} & \implies \vec{L}_O = c\vec{t}\vec{e} \end{cases}.$$

Par contre, l'énergie n'est pas conservée parce qu'il peut y avoir des forces internes qui travaillent.

Exemple (Tabouret tournant). Considérons l'exemple du tabouret tournant.



Le mouvement se fait dans un plan horizontal :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{0}.$$

Le moment des forces par rapport à O est

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 = \underbrace{(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} = \vec{0},$$

donc le moment cinétique par rapport à O est conservé. Mais

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \overrightarrow{OM_1} \wedge m \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge m \vec{v}_2 \\ &= r \vec{e}_\rho \wedge (mr\dot{\phi} \vec{e}_\phi) + (-r \vec{e}_\rho) \wedge (-mr\dot{\phi} \vec{e}_\phi) \\ &= 2mr^2\dot{\phi} \vec{e}_z\end{aligned}$$

soit, avec $\dot{\phi} = \omega$,

$$\vec{L}_O = 2mr^2\omega \vec{e}_z.$$

Comme $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$, on en déduit

$$r^2\omega = \text{cte.}$$

Ainsi, si l'on diminue le rayon, ω augmente :

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

C'est grâce à cet effet que les patineurs font des pirouettes à très grandes vitesses de rotation.

Remarque. La quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés si on passe de r_1 à r_2 , mais pas l'énergie cinétique. En effet,

$$\vec{P} = m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0} \implies \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}.$$

Par contre, l'énergie cinétique est donnée par

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = mv^2 = mr^2\omega^2$$

donc

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{mr_2^2\omega_2^2}{mr_1^2\omega_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Pour rapprocher les masses, il faut leur appliquer des forces qui travaillent.

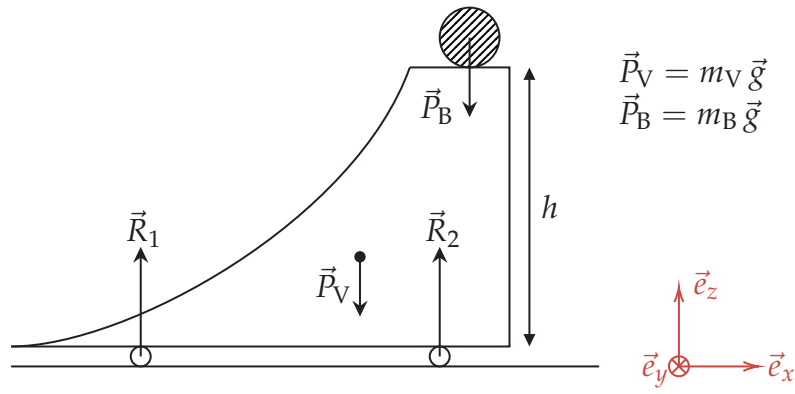
Définition (Système partiellement isolé). Un système est dit **partiellement isolé** selon une direction $\vec{u}$ si

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = 0.$$

Dans ce cas, seules les composantes suivant $\vec{u}$ sont conservées :

$$\vec{P} \cdot \vec{u} = \text{cte} \quad \text{et} \quad \vec{L}_O \cdot \vec{u} = \text{cte.}$$

Exemple (Voiture à boulet). Si le boulet roule le long de la pente, que se passe-t-il ?



Les forces extérieures sont toutes verticales. Ainsi,

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_x = 0 \implies m_B v_{Bx} + m_V v_{Vx} = \text{cte.}$$

Si au départ les deux sont au repos, on a donc

$$m_B v_{Bx} + m_V v_{Vx} = 0$$

ou encore

$$v_{Vx} = -v_{Bx} \frac{m_B}{m_V}.$$

Si l'on néglige les frottements, il n'y a pas de forces non conservatives qui travaillent, et l'énergie mécanique doit être conservée :

$$E = K_B + K_V + V_B + V_V = \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_V v_V^2 + m_B g z + 0 = \text{cte.}$$

Au départ, $E = m_B g h$ et à l'arrivée $E = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2$ ($v_B = |v_{Bx}|$ car le rail est horizontal en sortie), donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 \frac{m_V^2}{m_B^2} &= m_B g h \\ \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 \left(1 + \frac{m_V}{m_B} \right) &= m_B g h \\ v_{Vx}^2 &= 2gh \frac{m_B}{m_V \left(1 + \frac{m_V}{m_B} \right)}, \end{aligned}$$

soit

$$v_V^2 = 2gh \frac{1}{x(1+x)}$$

avec $x = \frac{m_V}{m_B}$. Il y a trois cas limites :

- si $m_V \gg m_B$, alors $v_V \rightarrow 0$;
- si $m_B \gg m_V$, alors $v_V \rightarrow +\infty$;
- si $m_V = m_B$, alors $v_V = v_B = \sqrt{gh}$.

IV. Centre de masse

Définition (Centre de masse). Le centre de masse (aussi appelé centre de gravité ou centre d'inertie) est le barycentre des points M_i affectés des masses m_i . On le

note G , et il vérifie

$$\left(\sum_i m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i},$$

que l'on écrit souvent

$$M \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

avec $M = \sum_i m_i$.

Proposition. La définition de G est indépendante du point O .

Démonstration. On a simplement

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \overrightarrow{O'M_i} &= \sum_i m_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}) \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{O'O} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \\ &= M \overrightarrow{O'O} + M \overrightarrow{OG} = M \overrightarrow{O'G}. \end{aligned}$$

Définition alternative (Centre de masse).

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Démonstration. En appliquant la définition

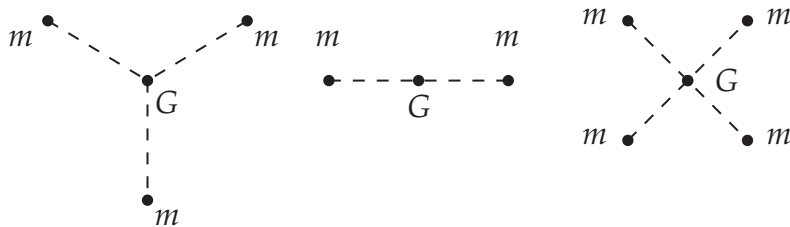
$$M \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

à $O = G$, on passe de la première définition à la deuxième.

Et pour passer de la deuxième à la première, il suffit de remplacer $\overrightarrow{GM_i}$ par $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}$ dans $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

Cette définition a l'avantage de ne pas faire intervenir un point O annexe, et elle permet de deviner où se situe G dans des cas simples.

Exemples. On a les trois cas simples suivants.



Proposition. La quantité de mouvement totale vérifie

$$M \vec{v}_G = \vec{P}.$$

Démonstration. On a

$$M \vec{v}_G = M \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \overrightarrow{OG})$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \right) = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}.$$

Théorème (Théorème du centre de masse). Soient $\vec{a}_G$ l'accélération du centre de masse et $\vec{F}^{\text{ext}}$ la somme des forces extérieures, on a alors

$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}.$$

Preuve. On a simplement

$$M \vec{a}_G = \frac{d}{dt} (M \vec{v}_G) = \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}^{\text{ext}}.$$

En d'autres termes, le centre de masse d'un système de points matériels se comporte comme un point matériel de masse $M = \sum_i m_i$ subissant toutes les forces extérieures qui s'appliquent au système. C'est cette propriété qui justifie de traiter de nombreux problèmes faisant intervenir des objets de taille non négligeable comme des points matériels.

1. Référentiel du centre de masse

Le référentiel du centre de masse, noté $\mathcal{R}^*$, est le référentiel qui, à l'instant t , est en translation par rapport au référentiel du laboratoire à la vitesse $\vec{v}_G$.

L'intérêt de ce référentiel est que de nombreuses lois prennent une forme plus simple dans ce référentiel.

Proposition. Dans le référentiel du centre de masse, les vitesses $\vec{v}_i^*$ satisfont

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{0}.$$

Preuve. D'après les formules de changement de référentiel,

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_G + \vec{v}_i^* \\ \sum_i m_i \vec{v}_i &= \sum_i m_i \vec{v}_G + \sum_i m_i \vec{v}_i^* \\ \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{=\vec{P}} &= \underbrace{M \vec{v}_G}_{=\vec{P}} + \sum_i m_i \vec{v}_i^*, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{0}.$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle.

V. Problème à deux corps

On s'intéresse à deux points matériels de masse m_1 et m_2 n'étant soumis qu'aux forces internes $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Comme $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, le centre de masse G satisfait

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}.$$

Il est donc en translation uniforme par rapport au référentiel du laboratoire.

Définitions (Positions du centre de masse et relative). Plutôt que d'utiliser $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ pour décrire le mouvement, cela suggère de faire un changement de variables, et de remplacer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par

$$\begin{cases} \vec{R} = \text{position du centre de masse,} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{position relative.} \end{cases}$$

Par définition du centre de masse, on a bien sûr

$$M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \implies \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Les équations du mouvement pour $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont données par

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

On en déduit aisément les équations du mouvement pour $\vec{R}$ et $\vec{r}$. Pour $\vec{R}$, on a simplement

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}.$$

On retrouve le fait que $\vec{a}_G = \vec{0}$. Pour $\vec{r}$, on a

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1}. \end{aligned}$$

Définition (Masse réduite). La quantité $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a la dimension d'une masse. On l'appelle **masse réduite**.

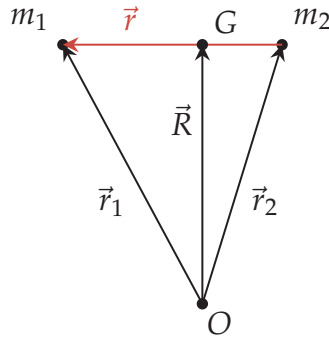
La position relative est donc régie par l'équation

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1},}$$

avec $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \parallel \vec{r}$: c'est un mouvement à **force centrale**. En effet, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_2 M_1}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \parallel \overrightarrow{M_2 M_1}$.

Exemple (Gravitation). Dans le cas de la gravitation, la position relative $\vec{r}$ se retrouve directement dans la force :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{C}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}.$$



Avec O une origine arbitraire, $\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ et $M = m_1 + m_2$.

Remarque. Le mouvement se ramène à celui de deux particules effectives indépendantes :

- une de masse $M = m_1 + m_2$, le centre de masse ;
- une de masse μ qui vérifie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, soit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

La solution en termes des inconnues initiales $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ s'obtient en inversant les relations donnant $\vec{R}$ et $\vec{r}$:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} (m_1 + m_2) \vec{R} + m_2 \vec{r} = (m_1 + m_2) \vec{r}_1 \\ (m_1 + m_2) \vec{R} - m_1 \vec{r} = (m_1 + m_2) \vec{r}_2 \end{cases}$$

soit finalement

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}.$$

Exemple (Mouvement des planètes autour du Soleil). Dans le calcul fait précédemment, nous avons supposé que le Soleil était immobile, et nous avons décrit le mouvement d'une planète comme celui d'un point matériel de masse m_P . Une description plus correcte doit inclure le mouvement du Soleil, et doit prendre en compte le fait qu'il est influencé par la planète.

La masse réduite est donnée par

$$\mu = \frac{m_P m_S}{m_P + m_S} = \frac{m_P}{1 + \frac{m_P}{m_S}} \simeq m_P \quad \text{si} \quad m_P \ll m_S.$$

L'erreur commise est d'ordre $\frac{m_P}{m_S}$, donc très petite puisque $m_P \ll m_S$.

Dans la solution générale du problème à deux corps, si on décrit le Soleil par $(m_2, \vec{r}_2)$ et la planète par $(m_1, \vec{r}_1)$, on obtient

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \simeq \vec{R} + \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \simeq \vec{R} \end{cases}.$$

$\vec{R}$ décrit à peu près la position du Soleil, et $\vec{r}$ la position par rapport au Soleil.

VI. Collisions

Si la force d'interaction est parfaitement connue, comme dans le cas de la gravitation, on peut calculer exactement les trajectoires. Si, lorsque les deux objets sont

très loin l'un de l'autre, leur trajectoire relative est simplement donnée par des droites, cela veut dire que la trajectoire relative est une hyperbole ($e > 1$). On peut en déduire exactement les positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

Mais dans beaucoup de circonstances, la nature des interactions n'est pas connue en détail. Est-ce qu'on doit en déduire qu'on ne peut rien dire sur les vitesses après que les objets sont passés à proximité l'un de l'autre, voire ont été en contact ? Non. Les lois de conservation permettent d'obtenir des renseignements intéressants.

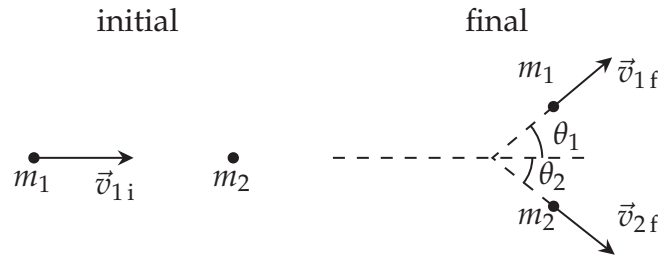
La conservation de la quantité de mouvement nous donne :

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}.$$

On peut se placer dans le référentiel où le point matériel 2 est au repos, ou, de façon équivalente, supposer que $\vec{v}_{2i} = \vec{0}$:

$$\boxed{m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}.} \quad (1)$$

Cette équation implique que ces trois vitesses sont coplanaires.



1. Choc élastique

Définition (Choc élastique). On dit qu'un choc est élastique si, en plus de la quantité de mouvement, l'énergie cinétique est conservée :

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.} \quad (2)$$

En prenant en compte le fait que le mouvement est plan, on a au total trois équations pour quatre inconnues : v_{1f} , v_{2f} , θ_1 et θ_2 . Donc on ne peut pas résoudre complètement le problème sans informations supplémentaires, mais on peut quand même obtenir des résultats généraux intéressants. L'équation (1) donne

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \\ 0 &= m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} \cos \theta_1 &= m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \\ m_1 v_{1f} \sin \theta_1 &= m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \end{cases},$$

et, en prenant la somme des carrés des deux membres, on a

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2f}^2.$$

L'équation (2) peut se réécrire

$$v_{2f}^2 \frac{m_2}{m_1} = v_{1i}^2 - v_{1f}^2,$$

d'où

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_{1i}^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1 = 0$$

soit, en posant $x = \frac{v_{1f}}{v_{1i}}$,

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x^2 - 2x \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0.$$

C'est une équation du second degré en x dont le discriminant est

$$\Delta = 4 \left(\cos^2 \theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \right).$$

On distingue d'abord deux cas généraux, puis deux cas particuliers.

— Si $m_2 > m_1$, alors Δ est toujours positif. La solution positive est donnée par

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos \theta_1 + \sqrt{\cos^2 \theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right).$$

— Si $m_2 < m_1$, alors $\Delta > 0$ si $\cos^2 \theta_1 > 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$, et la solution est positive si $\cos \theta_1 > 0$:

$$\theta_1 < \theta_{1\max} < \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Cas particuliers.

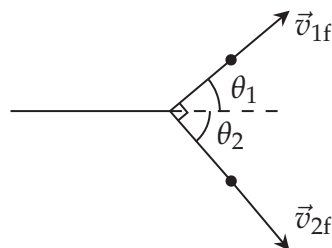
1. Si $m_1 = m_2$, alors on a

$$\begin{cases} \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \implies v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} \\ \vec{v}_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases},$$

donc

$$\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0.$$

- $\vec{v}_{1f} = \vec{0}$: échange des vitesses ;
- $\vec{v}_{2f} = \vec{0}$: pas de choc ;
- $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.



2. Collision unidimensionnelle :

$$\begin{cases} v_{1ix} = v_{1fx} + \frac{m_2}{m_1} v_{2fx} \\ v_{1ix}^2 = v_{1fx}^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2fx}^2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_{1ix} - v_{1fx} = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx} \\ v_{1ix}^2 - v_{1fx}^2 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2fx}^2 \end{cases}.$$

Première solution : $v_{1ix} = v_{1fx}$ et $v_{2fx} = 0$. Il n'y a pas eu de choc.

Deuxième solution :

$$\begin{aligned} v_{1ix}^2 - v_{1fx}^2 &= (v_{1ix} + v_{1fx})(v_{1ix} - v_{1fx}) = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2 \\ \implies v_{1ix} + v_{1fx} &= \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2 \frac{m_1}{m_2 v_{2fx}} = v_{2fx}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2v_{1ix} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2fx},$$

et

$$2v_{1fx} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2fx} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1ix},$$

donc finalement

$$v_{2fx} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1ix} \quad \text{et} \quad v_{1fx} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1ix}.$$

Il y a trois cas limites.

- Si $m_1 = m_2$, alors $v_{1fx} = 0$ et $v_{2fx} = v_{1ix}$. C'est un simple échange des vitesses.
- Si $m_1 \ll m_2$, alors $v_{1fx} = -v_{1ix}$ et $v_{2fx} = 0$. C'est un rebond sur une masse infinie.
- Si $m_1 \gg m_2$, alors $v_{1fx} = v_{1ix}$ et $v_{2fx} = 2v_{1ix}$: la particule incidente continue à la même vitesse, la particule légère continue à deux fois la vitesse. C'est logique, dans le référentiel de la particule m_1 , la particule m_2 rebondit :

$$\begin{cases} \text{vitesse initiale : } v'_{2ix} = -v_{1ix}, \\ \text{vitesse finale : } v'_{2fx} = v_{1ix}. \end{cases}$$

2. Choc inélastique

Définition (Choc inélastique). Lorsque l'énergie cinétique n'est pas conservée, on parle de choc inélastique. De l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

En particulier, on parle de choc mou lorsque les deux points matériels restent accrochés après le choc : $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}$. La conservation de la quantité de mouvement implique

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{V} \implies \boxed{\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}}.$$

Remarque. $\vec{V}$ est la vitesse du centre de masse, puisque la quantité de mouvement totale est donnée par $(m_1 + m_2) \vec{V}$.

Au cours d'un tel choc, l'énergie cinétique diminue. En effet, on a

$$\begin{aligned} K_i - K_f &= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{2i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{2i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i})^2 > 0. \end{aligned}$$

Cette énergie s'est transformée en chaleur lors du choc.

Complément (Système de masse variable). Un problème apparenté est celui où un système expulse de la masse. Le cas typique est celui d'une fusée qui expulse du gaz à une vitesse $\vec{u} = -u \vec{e}_z$. La quantité de mouvement à un instant t est donnée par

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t),$$

et un petit instant δt plus tard, elle devient

$$\vec{p}(t + \delta t) = (m + \delta m) (\vec{v} + \delta \vec{v}) - \delta m (\vec{v} + \vec{u}),$$

où

- $m + \delta m$ est la masse de la fusée à l'instant $t + \delta t$ ($\delta m < 0$);
- $\vec{v} + \delta \vec{v}$ est la vitesse de la fusée à l'instant $t + \delta t$;
- $-\delta m$ correspond à la masse de gaz éjectée;
- $\vec{v} + \vec{u}$ est la vitesse du gaz éjecté.

La différence de ces deux quantités de mouvement est

$$\begin{aligned} \vec{p}(t + \delta t) - \vec{p}(t) &\simeq \delta m \vec{v} + m \delta \vec{v} - \delta m \vec{v} - \delta m \vec{u} \\ &= m \delta \vec{v} - \vec{u} \delta m, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\vec{p}(t + \delta t) - \vec{p}(t)}{\delta t} = m \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} - \vec{u} \frac{\delta m}{\delta t},$$

qui correspond, pour δt très petit, à

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

Or, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = m \vec{g}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \dot{m} \vec{u}.$$

Si l'on projette suivant z vertical ascendant, il vient

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \dot{m}u$$

car $\vec{g}$ et $\vec{u}$ sont orientés vers le bas. La condition de décollage $\frac{dv}{dt} > 0$ impose

$$\begin{aligned} -mg - \dot{m}u &> 0 \\ -\dot{m}u &> mg \\ |\dot{m}|u &> \underbrace{mg}_{\text{poids}}. \end{aligned}$$

L'équation peut se réécrire

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\dot{m}}{m} u,$$

d'où, si $v(0) = 0$,

$$v(t) = \ln \frac{m(0)}{m(t)} u - gt,$$

où l'on a supposé que la vitesse d'éjection u est constante.

Solides indéformables

« Parce qu'il est plus facile de construire des pyramides que des sphères. Parce que le vent produit les dunes en forme de pyramides et non de parthénon. »

— Umberto Eco

I. Introduction

Un solide indéformable peut être vu comme un ensemble de points matériels dont les distances relatives restent fixes au cours du temps.

La position d'un solide peut être repérée par six paramètres, par exemple les trois coordonnées d'un point et trois angles qui repèrent les positions de trois vecteurs orthonormés formant un repère lié au solide (par exemple les angles d'Euler, que nous introduirons un peu plus tard).

Or, nous avons vu qu'un système de points matériels satisfait les deux équations

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}.$$

Ce sont des équations vectorielles, donc effectivement six équations, autant que de paramètres pour fixer la position, et donc le problème est bien posé. Où se cache la difficulté ? Dans la traduction de ces équations en équations différentielles pour les variables choisies pour décrire le système.

Pour l'équation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$, c'est simple. Nous avons vu que $\vec{P} = M \vec{v}_G$, où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre de masse, et donc si l'on choisit les coordonnées du centre de masse x_G, y_G, z_G comme trois des variables, elles sont régies par les équations

$$m\ddot{x}_G = F_x^{\text{ext}}, \quad m\ddot{y}_G = F_y^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad m\ddot{z}_G = F_z^{\text{ext}}.$$

C'est le moment cinétique qui pose problème. En effet, alors que $\vec{P}$ est simplement relié à la vitesse d'un point, le moment cinétique n'est pas en général proportionnel à la vitesse de rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Par ailleurs, les forces peuvent s'appliquer à différents points d'un solide, et il peut être avantageux d'utiliser le théorème du moment cinétique en d'autres points que l'origine du repère, ce qui exige une généralisation du théorème $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$.

À ce sujet, notons que le poids d'un solide peut être considéré comme s'appliquant au centre de masse. En effet, si le solide est considéré comme une collection de masses m_i aux points M_i , le moment du poids en O est défini par

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{g} \\ &= \sum_i \overrightarrow{OG} \wedge m_i \vec{g} + \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{g} \\ &= \overrightarrow{OG} \wedge \underbrace{\left(\sum_i m_i \right)}_{=M} \vec{g} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g},\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{g}.}$$

Par ailleurs, le centre de masse pour un solide est en principe défini par une intégrale

$$\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \longrightarrow \vec{r}_G = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r},$$

où $\rho(\vec{r})$ est la densité volumique au point $\vec{r}$.

En pratique, on s'intéressera à des solides homogènes, et le centre de masse peut se déduire de simples considérations de symétrie (centre pour une sphère, un cube, un cylindre, un parallélépipède, *etc.*).

II. Cinématique

Commençons par nous familiariser avec la description du mouvement d'un solide. Comme vu précédemment, un solide définit un référentiel, et son mouvement est décrit par deux vecteurs :

- la vitesse d'un point, par exemple A ;
- une vitesse de rotation $\vec{\omega}$.

Pour un point M immobile par rapport au solide, $\vec{v}'_M = \vec{0}$, et on a

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}.}$$

C'est la relation fondamentale entre les vitesses de deux points d'un solide, vraie pour toute paire de points.

De même, toujours en supposant que M est immobile, $\vec{v}'_M = \vec{0}$ et $\vec{a}'_M = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}).}$$

Il est commode de distinguer quatre types de mouvement d'un solide suivant les valeurs de $\vec{v}_A$ et $\vec{\omega}$.

1. $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A = \vec{0} \implies \vec{v}_M = \vec{0} \quad \forall M$: le solide est au repos.
2. $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A \neq \vec{0} \implies \vec{v}_M = \vec{v}_A \quad \forall M$: le solide est en translation.
3. $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0 \implies \vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{\omega}}_{=0} = 0 \quad \forall M$:

tous les points ont une vitesse perpendiculaire à $\vec{\omega}$. Le solide est en rotation autour d'un axe parallèle à $\vec{\omega}$.

4. $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0 \implies \vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \quad \forall M$: tous les points ont la même vitesse projetée sur $\vec{\omega}$. Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal (composition d'une rotation d'axe $\vec{\omega}$ et d'une translation parallèle à $\vec{\omega}$).

Proposition (Axe instantané de rotation). Si $\vec{\omega} \neq 0$, il existe une droite et une seule sur laquelle tous les points ont la même vitesse parallèle à $\vec{\omega}$. Cette droite est appelée **axe instantané de rotation**.

Preuve. Cherchons un point C tel que $\vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$, ou encore $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \vec{0}$. Or,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{v}_C &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC})}_{=(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC})\vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{AC}} = \vec{0} \end{aligned}$$

implique que

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC}) \vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Une solution de cette équation est donnée par

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}}.$$

En effet, $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, et $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A - \omega^2 \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

De plus, si D appartient à la droite définie par C et $\vec{\omega}$, on a

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD}}_{=0 \text{ puisque } \overrightarrow{CD} \parallel \vec{\omega}} = \vec{v}_C$$

Enfin, pour un point E qui n'est pas sur la droite, $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CE} \neq 0$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CE} \perp \vec{\omega}$ donc $\vec{v}_E$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

La nature du mouvement (rotation simple ou mouvement hélicoïdal) se déduit simplement de cette formule. En effet, si $\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}$, alors

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) \\ &= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \omega^2 \vec{v}_A, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\vec{v}_C = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega}.$$

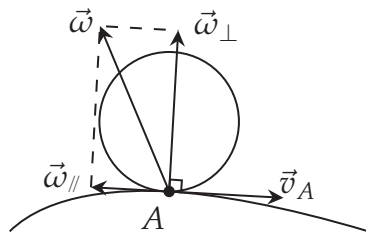
- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$, $\vec{v}_C = \vec{0}$. Les points sur l'axe instantané de rotation ont une vitesse nulle. Le mouvement est donc un mouvement de **rotation**.
- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$, $\vec{v}_C$ est parallèle à $\vec{\omega}$. Les points sur l'axe instantané de rotation sont animés d'un mouvement de translation parallèle à $\vec{\omega}$. C'est donc un mouvement **hélicoïdal**.

Dans tous les cas, l'axe instantané de rotation est l'axe qui passe par C et qui est parallèle à $\vec{\omega}$.

a. La relation $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ se démontre aisément en passant en coordonnées cartésiennes.

1. Solides en contact

Considérons un solide S en contact avec un autre, supposé immobile, et supposons que le contact soit réduit à un point A , et que les plans tangents des deux solides soient confondus en ce point.



$\vec{\omega}_\parallel$ et $\vec{v}_A$ sont dans le plan tangent, mais pas nécessairement colinéaires.

Le mouvement du solide S est caractérisé par deux vecteurs, $\vec{v}_A$ (la vitesse du point A de S par rapport à l'autre solide), et le vecteur $\vec{\omega}$.

Comme les solides sont indéformables, $\vec{v}_A$ doit être dans le plan tangent. Par contre, $\vec{\omega}$ peut avoir des composantes parallèles et perpendiculaires au plan tangent :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel.$$

Définitions. $\vec{v}_A$ est appelée vitesse de **glissement**, $\vec{\omega}_\parallel$ est appelée vitesse de **roulement**, et $\vec{\omega}_\perp$ est appelée vitesse de **pivotement**.

D'après les propriétés générales, on a :

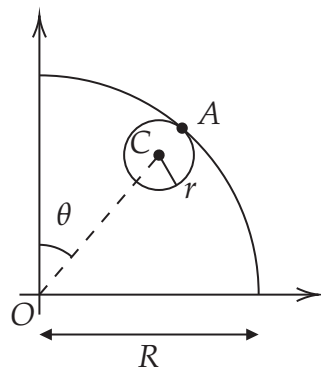
- Si $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ ($\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$), c'est une **rotation**.
- Si $\vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$ ($\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$), le point C défini par $\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} = \vec{0}$ est confondu avec A et A est sur l'axe instantané de rotation.

Cas particulier. Si $\vec{v}_A = \vec{0}$ il n'y a pas de glissement, et le mouvement est un pur mouvement de rotation puisque $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$. On dit qu'il s'agit d'un **roulement sans glissement**.

Résumé.

- $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$: l'axe instantané de rotation passe par A .
- $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$: mouvement de rotation.
- $\vec{v}_A = \vec{0}$: roulement sans glissement, rotation d'axe passant par A .

Exemple. On considère une bille de rayon r qui roule sans glisser à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Que peut-on dire sur $\vec{\omega}$?



- Roulement sans glissement donc $\vec{v}_A = \vec{0}$.
- Pour tout point de la bille,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

— Le centre de la bille a donc pour vitesse

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

avec $\overrightarrow{AC} = -r \vec{e}_r$.

— Posons $\vec{\omega} = \omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + \omega_\phi \vec{e}_\phi$. Alors on a

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} &= -r (\omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + \omega_\phi \vec{e}_\phi) \wedge \vec{e}_r \\ &= -r \omega_\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r - r \omega_\phi \vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_r \\ &= r \omega_\theta \vec{e}_\phi - r \omega_\phi \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

— Or, le centre est à la distance $R - r$ de l'origine. D'après les formules en coordonnées sphériques, on a donc

$$\vec{v} = (R - r) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + (R - r) \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

— En comparant ces deux expressions, on en déduit

$$\begin{cases} r \omega_\theta = (R - r) \dot{\phi} \sin \theta \\ -r \omega_\phi = (R - r) \dot{\theta} \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_\theta = \frac{R - r}{r} \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_\phi = -\frac{R - r}{r} \dot{\theta} \end{cases}.$$

La vitesse de pivotement ω_r n'est pas fixée par la condition de roulement sans glissement.

2. Mouvement plan sur plan

On parle de mouvement plan sur plan lorsque, à tout instant, les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe Π du référentiel fixe. De façon équivalente, un tel mouvement est caractérisé par le fait qu'une surface plane Σ du solide reste en permanence dans un plan Π .

Propriétés.

1. $\vec{\omega}$ est normal au plan Π .

En effet, $\vec{v}_M - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ doit être parallèle à Π pour tout vecteur $\overrightarrow{AM}$, donc perpendiculaire à la normale à Π , ce qui sera le cas si $\vec{\omega} \perp \Pi$.

2. Le mouvement est soit une translation, soit une rotation.

En effet, $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$. Ainsi, soit $\vec{\omega} = \vec{0}$ (translation), soit $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ mais $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$, et c'est une rotation.

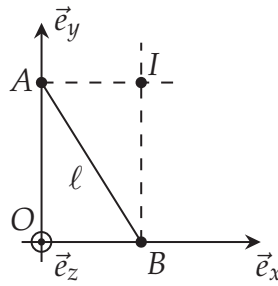
3. Si le mouvement est une rotation, il y a un centre instantané de rotation I dans Σ défini par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}.$$

Il satisfait $\vec{v}_I = \vec{0}$.

Exemples.

1. Considérons une barre qui glisse contre un mur en restant dans un plan vertical. Où est le centre instantané de rotation, et quelle est sa trajectoire pendant la chute ?



Comme la barre reste dans un plan vertical, c'est un mouvement plan sur plan, et $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

Le centre instantané de rotation I vérifie

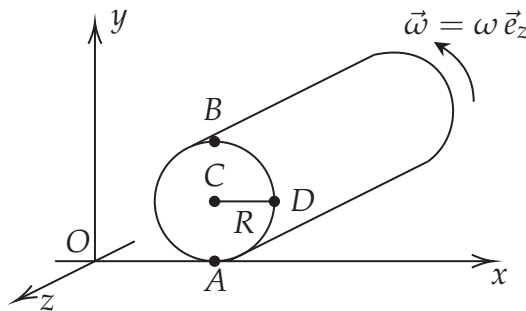
$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \vec{BI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_B}{\omega^2}.$$

On a

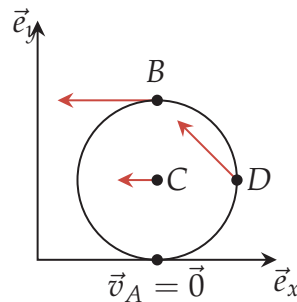
$$\begin{cases} \vec{v}_A \parallel \vec{e}_y & \Rightarrow \vec{AI} \parallel \vec{e}_x \\ \vec{v}_B \parallel \vec{e}_x & \Rightarrow \vec{BI} \parallel \vec{e}_y \end{cases}.$$

I est donc à l'intersection de la perpendiculaire au mur en A et de la perpendiculaire au sol en B . C'est donc le point qui complète un rectangle avec AOB . On en déduit que $OI = AB = \ell$. I décrit un quart de cercle de centre O et de rayon ℓ .

2. Considérons un cylindre qui roule sans glisser. Où est le centre instantané de rotation? Que valent les vitesses aux points A, B, C et D ?



Comme il s'agit d'un roulement sans glissement, $\vec{v}_A = \vec{0}$ et A est donc le centre instantané de rotation.

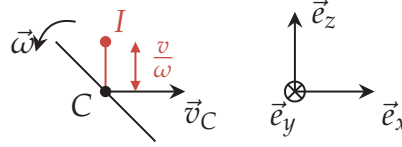


Les autres vitesses sont données par

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{\omega} \wedge \vec{AC} \\ &= \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_y \\ &= -R\omega \vec{e}_x, \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega} \wedge \vec{AB} = 2\vec{v}_C = -2R\omega \vec{e}_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_D &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} \\
&= \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_y + \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_x \\
&= -R\omega \vec{e}_x + R\omega \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

3. Considérons une barre qui tourne autour de son centre C dans un plan xy . Le centre C est animé d'une vitesse v dans la direction x . Où est le centre instantané de rotation ?



D'après la formule générale,

$$\overrightarrow{CI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C}{\omega^2}.$$

Or, $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_y$ et $\vec{v}_C = v \vec{e}_x$:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{-\omega \vec{e}_y \wedge v \vec{e}_x}{\omega^2} = \frac{\omega v}{\omega^2} \vec{e}_z,$$

soit finalement

$$\boxed{\overrightarrow{CI} = \frac{v}{\omega} \vec{e}_z.}$$

III. Théorèmes relatifs au moment cinétique et à l'énergie cinétique

Dans cette section, nous allons établir quelques théorèmes généraux relatifs au moment cinétique en un point quelconque et à sa dérivée.

Pour un point matériel, nous avons vu que $\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}$ satisfait

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge m \vec{v}.$$

Pour un ensemble de points, on définit de même

$$\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i,$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
\vec{L}_A &= \sum_i (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM_i}) \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \overrightarrow{AO} \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{=M \vec{v}_G},
\end{aligned}$$

soit

Théorème (Théorème du transfert).

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M \vec{v}_G.$$

Comme nous le verrons, il est souvent utile de considérer le moment cinétique au centre masse G .

Proposition.

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

où $\vec{L}_G^*$ est le moment cinétique dans le référentiel du centre de masse.

Preuve. On a simplement

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G) \\ &= \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_G \\ &= \vec{L}_G^* + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{GM}_i \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}_G, \end{aligned}$$

et donc finalement on a bien

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*.$$

Théorème 1 (1^{er} théorème de König). On a

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de $\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge m \vec{v}_G$ appliqué à $O = G$, et de $\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$.

Théorème 2 (2^e théorème de König). On a

$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2,$$

où K désigne l'énergie cinétique.

Preuve. L'énergie cinétique totale est définie par

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2.$$

Dans le référentiel du centre de masse, on a $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$, d'où

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^{*2} + 2 \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G + \vec{v}_G^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{*2}}_{=K^*} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G}_{\vec{0}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_G^2}_{=M} \\
&= K^* + \frac{1}{2} M v_G^2.
\end{aligned}$$

Théorème (Théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque).
On a

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G.$$

Complément (Preuve). Nous avons démontré que si O est un point fixe, le moment cinétique total par rapport à O satisfait l'équation

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}.$$

En utilisant le théorème du transfert, on en déduit que pour un point A quelconque, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M \vec{v}_G) \\
&= \underbrace{\frac{d\vec{L}_O}{dt}}_{=\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{AO} \right)}_{=-\vec{v}_A} \wedge M \vec{v}_G + \vec{AO} \wedge \underbrace{M \vec{a}_G}_{=\vec{F}^{\text{ext}}},
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} &= \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \vec{AO} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \\
&= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}.
\end{aligned}$$

Conséquences.

1. $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}}$ puisque $\vec{v}_G \wedge m \vec{v}_G = \vec{0}$;
2. $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ si $\vec{v}_A = \vec{0}$ (c'est le théorème général en un point fixe);
3. $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ si $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_G$.

Le théorème du moment cinétique prend une forme particulièrement simple en un point fixe du solide ou au centre de masse.

Résumé.

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \quad \text{si} \quad A = G, A \text{ fixe ou } \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G.$$

Enfin, les théorèmes relatifs à l'énergie d'un point matériel s'étendent directement au cas des solides.

Théorème (Théorèmes de l'énergie pour un solide).

- La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures.
- S'il n'y a que des forces conservatives qui travaillent, l'énergie mécanique est conservée.

Remarques.

- Le travail des forces fait intervenir la vitesse au point d'application.
- L'énergie potentielle du poids est donnée par Mgz_G , où z_G est la coordonnée verticale du centre de masse.
- Dans un solide, les forces intérieures ne travaillent pas parce que la puissance des forces entre deux points i et j est nulle. En effet, cette puissance est donnée par

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j + \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{M_i M_j}) = 0,$$

car, d'après la forme forte de la 3ème loi de Newton, $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est parallèle à $\overrightarrow{M_i M_j}$, donc perpendiculaire à $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{M_i M_j}$. Ce n'est bien sûr pas vrai pour un ensemble quelconque de points matériels.

IV. Calcul du moment cinétique

Dans un solide considéré comme un ensemble de points matériels de masses m_i , la vitesse de chaque point matériel i est donnée par

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i},$$

où A est un point du solide et $\vec{\omega}$ la vitesse instantanée de rotation. Ainsi, le moment cinétique en A peut s'exprimer uniquement à l'aide de $\vec{v}_A$ et $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i,$$

que l'on peut développer :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}) \\ &= \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} \right)}_{=M \overrightarrow{AG}} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \underbrace{\overrightarrow{AM_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})}_{= \overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i}}, \end{aligned}$$

soit

$$\vec{L}_A = M \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i} \right).$$

1. Cas particulier : point fixe ou centre de masse

Si $A = G$, ou si A est fixe ($\vec{v}_A = \vec{0}$), on a

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i} \right).$$

Plaçons-nous dans un repère cartésien $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point M_i , alors

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

et

$$\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

car

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

La composante suivant $\vec{e}_x$ du vecteur $\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i}$ est donnée par

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i.$$

Le terme $x_i^2 \omega_x$ se simplifie, et il reste

$$(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z.$$

Des formules équivalentes sont aisément établies pour les composantes suivant $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, d'où

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \begin{pmatrix} (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \end{pmatrix},$$

que l'on peut écrire de façon plus compacte à l'aide d'une matrice 3×3 :

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

que l'on réécrit simplement

$$\boxed{\vec{L}_A = \bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}}$$

avec $\bar{\bar{I}}_A$, la **matrice d'inertie**¹ au point A :

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend de l'orientation du trièdre $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ choisi pour exprimer les coordonnées x_i, y_i, z_i et $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Comme elle est symétrique, il doit exister² un trièdre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans lequel cette matrice prend une forme diagonale :

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Si l'on désigne par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes de $\vec{\omega}$ dans cette base, on a le résultat fondamental suivant :

$$\boxed{\vec{L}_A = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3.}$$

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ définissent les **axes principaux** du tenseur d'inertie au point A. Les éléments diagonaux I_1, I_2 et I_3 sont appelés les **moments principaux d'inertie**.

1. On parle aussi parfois de **tenseur d'inertie**.

2. Voir cours d'algèbre.

Remarques.

1. Les vecteurs principaux et les moments principaux dépendent du point A .
2. $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est appelé un **repère d'inertie**.
3. En général, $\vec{L}_A$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, sauf dans les cas suivants :
 - $\vec{\omega}$ est parallèle à un vecteur principal d'inertie, par exemple $\vec{e}_1$, alors $\vec{L}_A = I_1 \vec{\omega}$;
 - deux moments d'inertie sont égaux, par exemple $I_1 = I_2 = I$, et $\vec{\omega}$ est dans le plan engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, alors $\vec{L}_A = I \vec{\omega}$;
 - tous les moments d'inertie sont égaux : $I_1 = I_2 = I_3 = I$, alors $\vec{L}_A = I \vec{\omega}$ pour tout $\vec{\omega}$.

2. Cas général

Si $A \neq G$, et si A n'est pas fixe, on a

$$\vec{L}_A = M \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \bar{I}_A \vec{\omega}.$$

C'est la formule fondamentale qui permet d'exprimer le moment cinétique en un point A du solide en fonction de $\vec{v}_A$ et de $\vec{\omega}$. En pratique, on essaiera de se placer en un point fixe ou au centre de masse.

Le calcul du tenseur d'inertie en un point est compliqué car il faut remplacer les sommes par des intégrales :

$$\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \longrightarrow \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \sum_i m_i x_i y_i \longrightarrow \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) xy,$$

où $\rho(\vec{r})$ est la masse volumique du solide au point $\vec{r}$. Par ailleurs, la diagonalisation n'est pas simple.

En pratique, on peut s'en sortir simplement à l'aide de quelques résultats faciles à démontrer.

3. Moment d'inertie par rapport à un axe

Définition. Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ est défini par

$$I_\Delta = \sum_i m_i d_i^2$$

où d_i est la distance de la masse m_i à l'axe Δ

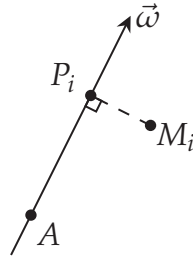
Exemple : Dans la formule $\vec{L}_A = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$, $I_1 = I_\Delta$ où $\Delta = (A, \vec{e}_1)$, et de même pour I_2 et I_3 .

Proposition.

$$\vec{\omega} \cdot \bar{I}_A \vec{\omega} = I_\Delta \omega^2$$

où Δ est l'axe passant par A et parallèle à $\vec{\omega}$.

Preuve. Posons $\overrightarrow{AM_i} = \overrightarrow{AP_i} + \overrightarrow{P_iM_i}$, où P_i est la projection de M_i sur l'axe Δ .



On a donc

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + \overrightarrow{P_iM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + d_i^2.$$

Or,

$$\bar{I}_A \vec{\omega} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i} \right)$$

et

$$\bar{I}_A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{AM_i}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right),$$

mais

$$\overrightarrow{AM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + d_i^2$$

et

$$(\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega})^2 = (\overrightarrow{AP_i} \cdot \vec{\omega})^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 \omega^2 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{P_iM_i} \perp \vec{\omega} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP_i} \parallel \vec{\omega},$$

d'où

$$\bar{I}_A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i d_i^2 \omega^2.$$

4. Théorème de Huygens-Steiner

Théorème (Théorème de Huygens-Steiner). Si Δ_G est l'axe parallèle à Δ passant par G , alors

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2,$$

où d est la distance entre Δ et Δ_G .

Complément (Preuve). On a :

$$\begin{aligned} \bar{I}_A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} &= \sum_i m_i \left[(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i})^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega} + \overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right] \\ &= \sum_i m_i \left[(\overrightarrow{AG}^2 + 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM_i} + \overrightarrow{GM_i}^2) \omega^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})^2 - (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega}) (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega}) \right] \\ &= \sum_i m_i \left[\overrightarrow{GM_i}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right] + \sum_i m_i \left[\overrightarrow{AG}^2 \omega^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega})^2 \right] \\ &\quad + \sum_i m_i \left[2 (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM_i}) \omega^2 - 2 (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega}) (\overrightarrow{GM_i} \cdot \vec{\omega}) \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $\bar{I}_G \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$, le deuxième terme est égal à $Md^2 \omega^2$ et le troisième terme peut être réécrit

$$2 \left(\overrightarrow{AG} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}}_{=\vec{0}} \right) \omega^2 - 2 (\overrightarrow{AG} \cdot \vec{\omega}) \left(\underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}}_{=\vec{0}} \right) \cdot \vec{\omega};$$

il est donc nul. Finalement,

$$\bar{\bar{I}}_A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \underbrace{\bar{\bar{I}}_G \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}_{=I_{\Delta_G} \omega^2} + Md^2 \omega^2$$

et donc

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + Md^2.$$

5. Rotation autour d'un axe quelconque

Si Δ est un axe quelconque (et pas un axe principal d'inertie), le moment I_{Δ} peut se calculer à partir des moments principaux d'inertie. En effet, si $\vec{\omega}$ est parallèle à Δ , on a :

$$I_{\Delta} \omega^2 = (\bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}.$$

Dans la base où $\bar{\bar{I}}_A$ est diagonal, on a en particulier

$$\begin{aligned} I_{\Delta} \omega^2 &= (I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3) \cdot (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \\ &= I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

et donc finalement

$$I_{\Delta} = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2},$$

ou encore, en posant $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ avec $||\vec{u}||^2 = 1$,

$$I_{\Delta} = I_1 u_1^2 + I_2 u_2^2 + I_3 u_3^2.$$

Dans cette expression, u_1 , u_2 et u_3 sont les composantes d'un vecteur unitaire parallèle à Δ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ où $\bar{\bar{I}}_A$ est diagonal.

6. Symétries

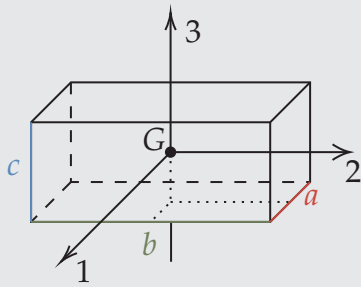
Pour les solides ayant des symétries, les axes principaux sont déterminés par les symétries. C'est particulièrement utile au point G , où les symétries fixent le plus souvent tous les axes principaux.

Règles de symétrie. Est axe principal d'inertie en A tout axe passant par A et satisfaisant l'une des propriétés suivantes :

- c'est un axe de symétrie, c'est-à-dire un axe tel qu'une rotation autour de cet axe d'angle strictement inférieur à 2π laisse le volume occupé par l'objet inchangé.
- il est perpendiculaire à un plan de symétrie passant par A , c'est-à-dire un plan qui sépare l'objet en deux parties qui sont des images miroirs l'une de l'autre.

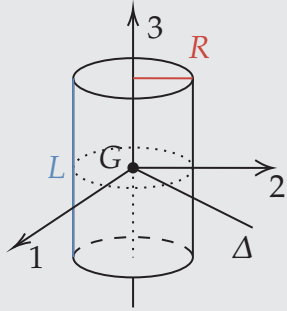
Table des principaux moments d'inertie.

On suppose que les systèmes sont homogènes.



$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2) \\ I_2 = \frac{1}{12}M(c^2 + a^2) \\ I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \end{cases}$$

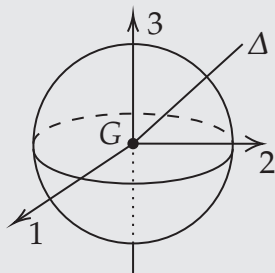
Parallélépipède rectangle plein



Plein : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
 $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

Creux : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
 $I_3 = MR^2$

Cylindre de révolution

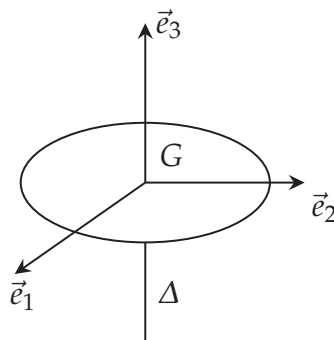


Boule pleine : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

Sphère creuse : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$

Sphère

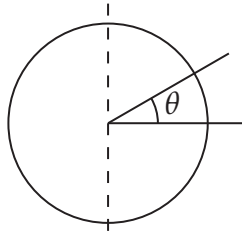
Exemple. Considérons un anneau homogène de masse M .



L'axe donné par $\vec{e}_3$ est un axe de symétrie. $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ (et tout vecteur dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$) sont perpendiculaires à un plan vertical passant par Δ . Par exemple, $\vec{e}_1$ est perpendiculaire au plan $(\Delta, \vec{e}_2)$, qui est un plan de symétrie. On a alors

$$I_3 = MR^2$$

qui est évident car toute la masse est à la distance R . Quant à I_1 et I_2 , ils ont la même valeur $I_1 = I_2 = I = \sum_i m_i d_i^2$. Pour la calculer, introduisons la densité linéaire λ et remplaçons la somme par une intégrale en introduisant l'angle θ .



La distance s'écrit d_i devient $d = R \cos \theta$. La densité linéaire se calcule en utilisant la masse :

$$\int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = M \implies \lambda = \frac{M}{2\pi R}.$$

On a donc

$$I = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta R^2 \cos^2 \theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{M}{2\pi R} R^3 \pi = \frac{1}{2} MR^2,$$

et finalement

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} MR^2.$$

V. Énergie cinétique

Comme $\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}$, on a

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{M_i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_A^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})}_{=M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG})} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2. \end{aligned}$$

De plus, $(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha$ et $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \alpha$ donc

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 b^2 \implies (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\overrightarrow{AM_i}^2 \omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AM_i})^2) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_A \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$E_C = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_A \vec{\omega}.$$

Cas particuliers.

— Si $\vec{v}_A = \vec{0}$, alors

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_A \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2,$$

où Δ est l'axe parallèle à $\vec{\omega}$ passant par A .

— Si $A = G$, alors

$$E_C = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_G \vec{\omega}.$$

On retrouve le deuxième théorème de König, $K = \frac{1}{2} m v_G^2 + K^*$, où l'on a $K^* = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_G \vec{\omega}$.

Résumé (Moment cinétique et énergie cinétique).

Si A fixe ou $A = G$

— Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}.$$

— Moment cinétique :

$$\vec{L}_A = \bar{I}_A \vec{\omega} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$$

avec $I_A = I_{\Delta_G} + M d^2$, ou encore

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G,$$

qui est toujours vrai.

— Énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{I}_A \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \text{ si } A \text{ est fixe}$$

ou

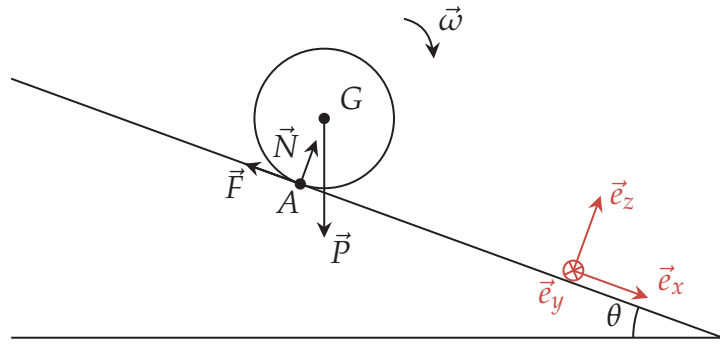
$$E_C = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \omega^2 \text{ si } A=G.$$

VI. Roulement sans glissement

Comme première application, nous allons étudier des exemples de roulement sans glissement.

1. Cylindre sur plan incliné

Considérons un cylindre de rayon R et de masse M . Le moment d'inertie par rapport à l'axe ($G \vec{e}_y$) est $I = kMR^2$ avec $k = \frac{1}{2}$ si le cylindre est plein ou $k = 1$ s'il est creux. Le point A est sur l'axe de contact entre le cylindre et le plan incliné, dans le même plan perpendiculaire à l'axe du cylindre que G . Quelle est la condition de roulement sans glissement? Quelle est la vitesse à l'arrivée après une descente de h ?



Posons $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Le mouvement est complètement déterminé si l'on connaît $\vec{v}_G(t)$ et $\vec{\omega}(t)$. Or,

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}.$$

S'il y a roulement sans glissement, alors $\vec{v}_A = \vec{0}$, où A est le point sur l'axe instantané de rotation dans le même plan parallèle à $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ que G, et

$$\vec{v}_G = \omega \vec{e}_y \wedge R \vec{e}_z = \omega R \vec{e}_x.$$

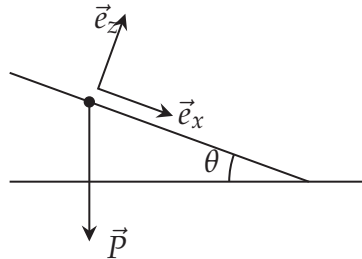
Le mouvement est donc totalement déterminé par $\omega(t)$.

Comment trouver $\omega(t)$? Le plus simple est d'appliquer un théorème qui ne fait pas intervenir de forces inconnues. Or, les forces de réaction du plan incliné sur le cylindre sont symétriques par rapport à A, et leurs moments se compensent puisqu'ils font intervenir les mêmes forces avec des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ opposés. Du coup, seul le moment du poids va rester, et le plus simple est alors d'appliquer le théorème du moment cinétique en A. Comme $\vec{v}_A = \vec{0}$, il prend la forme

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_z \wedge \vec{P}.$$

Calculons les angles utiles :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_x} \right) &= \frac{\pi}{2} - \theta \implies \cos \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_x} \right) = \sin \theta, \\ \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_z} \right) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta \implies \cos \left(\widehat{\vec{P}, \vec{e}_z} \right) = -\cos \theta. \end{aligned}$$



On a

$$\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = R \vec{e}_z \wedge Mg (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) = MRg \sin \theta \vec{e}_y.$$

Par ailleurs, l'axe $(A, \vec{e}_y)$ est perpendiculaire à un plan de symétrie du cylindre. C'est donc un axe principal d'inertie. Comme $\vec{\omega}$ est parallèle à cet axe, on a :

$$\vec{L}_A = I_{\Delta_A} \vec{\omega} = I_{\Delta_A} \omega \vec{e}_y.$$

Le théorème du moment cinétique conduit donc à l'équation :

$$I_{\Delta_A} \dot{\omega} = MRg \sin \theta.$$

D'après le théorème de Huygens-Steiner,

$$I_{\Delta_A} = I + MR^2 = (k+1)MR^2$$

et donc

$$\dot{\omega} = \frac{MRg \sin \theta}{(k+1)MR^2},$$

soit finalement

$$\dot{\omega} = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta.$$

À partir de là, on peut tout calculer :

$$\vec{v}_G = \omega R \vec{e}_x \implies \vec{a}_G = \dot{\omega} R \vec{e}_x = \frac{g \sin \theta}{k+1} \vec{e}_x.$$

Le principe fondamental s'écrit

$$M \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}.$$

La projection selon $\vec{e}_x$ donne

$$\begin{aligned} M \vec{a}_G \cdot \vec{e}_x &= \vec{P} \cdot \vec{e}_x + \vec{N} \cdot \vec{e}_x + \vec{F} \cdot \vec{e}_x \\ \frac{Mg \sin \theta}{k+1} &= Mg \sin \theta + F_x \\ F_x &= -Mg \sin \theta \left(1 - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

La projection de la force de frottement sur $\vec{e}_x$ est négative, ce qui est normal car c'est elle qui induit le mouvement de rotation. Sa norme est donnée par

$$F = Mg \sin \theta \frac{k}{k+1}.$$

La projection selon $\vec{e}_z$ donne

$$0 = \vec{P} \cdot \vec{e}_z + N \implies 0 = -Mg \cos \theta + N_z,$$

soit

$$N_z = Mg \cos \theta.$$

Cette force est bien orientée vers le haut, et sa norme est donnée par :

$$N = Mg \cos \theta.$$

— **Condition de roulement sans glissement** : il faut que $F \leq \mu_s N$:

$$\begin{aligned} Mg \sin \theta \frac{k}{k+1} &\leq \mu_s Mg \cos \theta \\ \tan \theta &\leq \mu_s \left(1 + \frac{1}{k} \right), \end{aligned}$$

soit

$$\tan \theta \leq 2\mu_s$$

si le cylindre est creux et

$$\tan \theta \leq 3\mu_s$$

s'il est plein. Cette condition est moins stricte que celle d'un solide qui glisse ($\tan \theta \leq \mu_s$ du chapitre 4).

— **Vitesse à l'arrivée** : à $t = 0$, $\omega = 0$, $\vec{v}_G = \vec{0}$ et $x_G = 0$. On a

$$\omega = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta \implies \omega = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta t,$$

donc

$$\dot{x}_G = R\omega = \frac{g}{k+1} \sin \theta t$$

et ainsi

$$x_G = \frac{1}{2} \frac{g}{k+1} \sin \theta t^2.$$

À l'arrivée,

$$x_G = \frac{h}{\sin \theta}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g}{k+1} \sin \theta t^2 &= \frac{h}{\sin \theta} \\ t^2 &= \frac{2(k+1)h}{g} \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ t &= \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta} \\ \dot{x}_G &= \frac{g}{k+1} \sin \theta \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta} \\ \dot{x}_G &= \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$v_G = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}},$$

soit

$$v_G = \sqrt{gh}$$

si le cylindre est creux et

$$v_G = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

s'il est plein. Ces vitesses sont plus petites que pour un glissement sans frottement ($v = \sqrt{2gh}$ du chapitre 4).

Méthodes alternatives.

— **Théorème du moment cinétique en G** :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{GA} \wedge \vec{F} = -R\vec{e}_z \wedge (-F\vec{e}_x) = RF\vec{e}_y$$

avec $\vec{L}_G = I\vec{\omega}$ car l'axe $(G\vec{e}_y)$ est un axe principal d'inertie d'où

$$I\dot{\omega} = RF.$$

Combinée avec les autres équations tirées du principe fondamental $M\vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}}$, on retrouve bien sûr la même solution.

- **Théorème de l'énergie mécanique** : la force de frottement ne travaille pas car $\vec{v}_A = \vec{0}$. Ainsi, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie cinétique est donnée par

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} k M R^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2. \end{aligned}$$

On peut aussi la calculer comme

$$K = \frac{1}{2} I_{\Delta_A} \omega^2 = \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2.$$

Au départ, $K = 0$ et $V = Mgh$. À l'arrivée, $K = \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2$ et $V = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2 &= Mgh \\ \omega^2 &= \frac{2gh}{(k+1) R^2} \end{aligned}$$

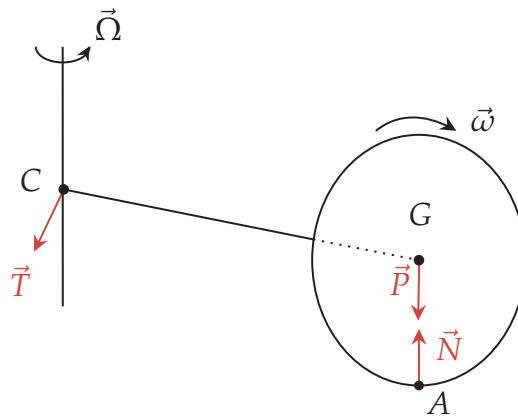
et l'on retrouve

$$v_G = \omega R = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}.$$

Remarque. Comme pour un solide qui glisse, les frottements ralentissent le système et diminuent la vitesse finale, mais cette fois les frottements ne travaillent pas. Ils transforment une partie de l'énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation.

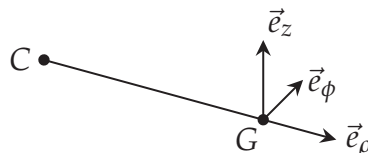
2. Meule

Considérons un disque qui roule sans glisser, de rayon R et de masse M relié à une tige de longueur $d = GC$ horizontale de masse négligeable tournant à $\vec{\Omega}$. On suppose que l'interaction entre la tige et l'axe vertical se réduit à une force $\vec{T}$ appliquée en C . Question : Calculer la force de réaction $\vec{N}$ du sol sur la meule.



On choisit le repère $(C, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, de sorte que

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = -\omega \vec{e}_\rho.$$



1. Relation entre Ω et ω .

$\vec{v}_C = \vec{0}$ nous donne

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{CG} \\ &= (-\omega \vec{e}_\rho + \Omega \vec{e}_z) \wedge d \vec{e}_\rho = \Omega d \vec{e}_\phi,\end{aligned}$$

et $\vec{v}_A = \vec{0}$ nous donne

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{AG} \\ &= (-\omega \vec{e}_\rho + \Omega \vec{e}_z) \wedge R \vec{e}_z = R\omega \vec{e}_\phi,\end{aligned}$$

dont on déduit finalement

$$\boxed{\Omega d = R\omega.}$$

2. Théorème du moment cinétique.

Pour se débarrasser de $\vec{T}$, on va appliquer le théorème du moment cinétique en C :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}}.$$

a) **Calcul de $\vec{L}_C$.** On a

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Or,

$$\vec{L}_G = I_3 \vec{\omega} + I_1 \vec{\Omega}$$

car $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont dirigés selon des axes principaux. Les moments d'inertie se calculent facilement, il s'agit du cas particulier d'un cylindre plein avec $L = 0$:

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{2}MR^2 \\ I_1 = \frac{1}{4}MR^2 \end{cases}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\vec{L}_G &= \frac{1}{4}MR^2\Omega \vec{e}_z - \frac{1}{2}MR^2\omega \vec{e}_\rho \\ \vec{L}_C &= \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge M \vec{v}_G \\ &= \vec{L}_G + d \vec{e}_\rho \wedge MR\omega \vec{e}_\phi \\ &= \vec{L}_G + dMR\omega \vec{e}_z = \vec{L}_G + Md^2\Omega \vec{e}_z\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{L}_C = \left(\frac{1}{4}MR^2 + Md^2 \right) \Omega \vec{e}_z - \frac{1}{2}MR^2\omega \vec{e}_\rho.$$

Au cours du mouvement, $\vec{e}_z$ ne change pas :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_C}{dt} &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \\ &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \\ &= -\frac{1}{2}MR^2\omega \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}MR^2\omega \Omega \vec{e}_\phi.$$

b) **Moment des forces.** On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} &= \vec{CG} \wedge M\vec{g} + \vec{CA} \wedge \vec{N} \\
 &= d\vec{e}_\rho \wedge (-Mg)\vec{e}_z + \vec{CG} \wedge \vec{N} + \underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}} \\
 &= d\vec{e}_\rho \wedge (-Mg\vec{e}_z + N\vec{e}_z) \\
 &= d(Mg - N)\vec{e}_\phi.
 \end{aligned}$$

Finalement, en réunissant les deux :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}MR^2\omega\Omega &= d(Mg - N) \\
 -\frac{1}{2}MRd\Omega^2 &= d(Mg - N),
 \end{aligned}$$

et enfin

$$N = Mg + \frac{MR\Omega^2}{2}.$$

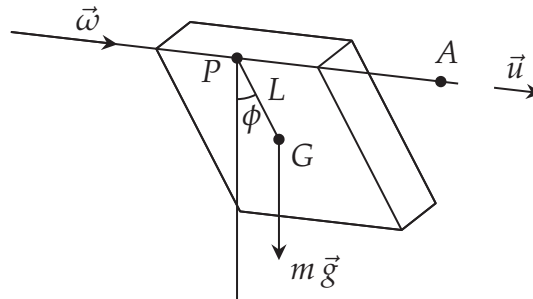
Remarques.

- $N > Mg$: du fait de son mouvement, la meule appuie plus fort sur le sol.
- Si l'on avait pris en compte une force de frottement $\vec{F} = -F\vec{e}_\phi$, il serait apparu un moment $-dF\vec{e}_z - RF\vec{e}_\rho$. Comme la dérivée du moment cinétique n'a pas de composante suivant $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z$, on en déduit que la force de frottement doit être nulle. Ceci n'est qu'une approximation. Il doit y avoir une force de frottement pour que le disque de la meule roule sans glisser. Cela implique que l'interaction entre la tige et l'axe ne se réduit pas exactement à une force, mais qu'elle doit aussi impliquer un couple (c'est-à-dire un moment local).

VII. Rotation autour d'un axe fixe

1. Pendule physique

On appelle pendule physique tout solide pouvant tourner autour d'un axe fixe. Prenons l'exemple d'un parallélépipède.



Utilisons le théorème du moment cinétique au point A sur l'axe :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ étant indépendant du temps, on a

$$\frac{d\vec{L}_A \cdot \vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u}.$$

On a

$$\vec{L}_A \cdot \vec{u} = \vec{L}_A \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = I_\Delta \omega = I_\Delta \dot{\phi}$$

avec

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + ML^2.$$

De l'autre côté,

$$\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = (\vec{AG} \wedge M \vec{g}) \cdot \vec{u}$$

car les forces exercées au niveau de l'axe ont un moment perpendiculaire à $\vec{AM}$, où M est le point d'application, donc à $\vec{u}$. Alors

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{u} &= \underbrace{(\vec{AP} \wedge M \vec{g})}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{AP} \parallel \vec{u}} + (\vec{PG} \wedge M \vec{g}) \cdot \vec{u} \\ &= -LMg \sin \phi. \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_\Delta \ddot{\phi} = -LMg \sin \phi,$$

et enfin

$$\ddot{\phi} = -\frac{LMg}{I_\Delta} \sin \phi.$$

Méthode alternative. On aurait pu utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

$$K = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\phi}^2 \quad \text{et} \quad V = -MgL \cos \phi,$$

qui mène à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\phi}^2 - MgL \cos \phi &= \text{cte} \\ I_\Delta \dot{\phi} \ddot{\phi} + MgL \sin \phi \dot{\phi} &= 0 \\ I_\Delta \ddot{\phi} &= -MgL \sin \phi. \end{aligned}$$

Remarque. Si toute la masse est concentrée en G (cas du point matériel), alors

$$I_{\Delta_G} = 0 \quad \text{et} \quad I_\Delta = ML^2$$

et

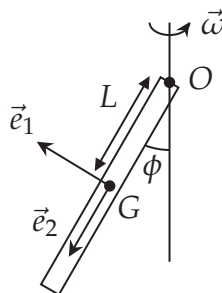
$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi.$$

On retrouve l'équation du pendule.

Sinon, $I_\Delta > ML^2$, ce qui implique que $\omega^2 < g/L$: la période des oscillations est plus grande que celle du pendule simple.

2. Pendule tournant

Considérons un pendule physique tournant à $\vec{\omega}$ constant. On cherche à déterminer l'angle ϕ .



On appelle $I_{\perp}$ et $I_{\parallel}$ les moments d'inertie en G suivant les axes principaux $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
Le moment cinétique en G s'écrit

$$\vec{L}_G = I_{\perp} \omega_1 \vec{e}_1 + I_{\parallel} \omega_2 \vec{e}_2$$

avec $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2$ et

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = \omega \sin \phi \quad \text{et} \quad \omega_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = -\omega \cos \phi,$$

ce qui conduit à

$$\vec{L}_G = \omega I_{\perp} \sin \phi \vec{e}_1 - \omega I_{\parallel} \cos \phi \vec{e}_2.$$

Pour éliminer la force de réaction en O , le plus simple est d'appliquer le théorème du moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Avec

$$\vec{v}_G = v_G \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad v_G = L \omega \sin \phi,$$

on a

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_G + ML \vec{e}_2 \wedge L \omega \sin \phi \vec{e}_3 \\ &= \vec{L}_G + ML^2 \omega \sin \phi \vec{e}_1 \\ &= (I_{\perp} + ML^2) \omega \sin \phi \vec{e}_1 - I_{\parallel} \omega \cos \phi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu calculer directement $\vec{L}_O$ en utilisant le théorème de Huygens-Steiner.

Comme ω et ϕ sont constants, la seule dépendance en t vient de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = \omega_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\omega_2 \vec{e}_3 \\ &= \omega \cos \phi \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_3 \\ &= \omega \sin \phi \vec{e}_3. \end{aligned}$$

On en déduit la dérivée :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (I_{\perp} + ML^2 - I_{\parallel}) \omega^2 \sin \phi \cos \phi \vec{e}_3.$$

Le moment est

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} &= \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{g} \\ &= L \vec{e}_2 \wedge (-Mg \sin \phi \vec{e}_1 + Mg \cos \phi \vec{e}_2) \\ &= MgL \sin \phi \vec{e}_3, \end{aligned}$$

d'où

$$(I_{\perp} - I_{\parallel} + ML^2) \omega^2 \sin \phi \cos \phi = MgL \sin \phi$$

et finalement

$$\cos \phi = \frac{MgL}{\omega^2 (I_{\perp} - I_{\parallel} + ML^2)},$$

ou encore

$$\boxed{\cos \phi = \frac{g}{\omega^2 L} \frac{1}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{ML^2}}.}$$

$\cos \phi = \frac{g}{\omega^2 L}$ est le résultat pour un point matériel de masse M en G . (C'est le même problème que celui de la bille dans un cerceau en rotation vu dans le chapitre sur les coordonnées cylindriques et sphériques). Pour un objet étendu, $\cos \phi$ est plus petit, donc ϕ est plus grand, tant que $I_{\perp} > I_{\parallel}$, ce qui est le cas pour une barre. Si l'objet suspendu était une plaque perpendiculaire à $\vec{e}_2$, ce serait l'inverse puisque dans ce cas $I_{\perp} < I_{\parallel}$.

Remarque. Dans le cas de la bille dans un cerceau, on a pu résoudre le problème sans utiliser le théorème du moment cinétique parce que la direction de la force exercée sur la bille est connue : elle pointe vers le point O . Dans le cas présent, on peut se convaincre que ce n'est pas le cas. Si on appelle $\vec{T}$ la force exercée par l'axe sur la barre, l'équation $M\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{T}$ permet de démontrer que $\vec{T} \cdot \vec{e}_1 = M \sin \phi (g - L\omega^2 \cos \phi)$, ce qui n'est pas nul sauf si $\cos \phi = g/(\omega^2 L)$, c'est-à-dire si $I_{\perp} = I_{\parallel}$.

VIII. Mouvement autour d'un point fixe

1. Équations d'Euler (complément)

Pour décrire le mouvement d'un solide autour d'un point fixe C , il est utile de considérer le repère $(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont les axes principaux d'inertie en C . Le mouvement du solide est complètement décrit par un vecteur $\vec{\omega}(t)$, que l'on peut découper en

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3.$$

Le moment cinétique en C est donné par

$$\vec{L}_C = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3,$$

où I_1, I_2 et I_3 sont les moments principaux d'inertie.

La dérivée de $\vec{L}_C$ est donnée par

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_1 \left(\dot{\omega}_1 \vec{e}_1 + \omega_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right) + I_2 \left(\dot{\omega}_2 \vec{e}_2 + \omega_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right) + I_3 \left(\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 + \omega_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 \\ &= -\omega_2 \vec{e}_3 + \omega_3 \vec{e}_2. \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \omega_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = -\omega_1 \vec{e}_2 + \omega_2 \vec{e}_1,$$

d'où

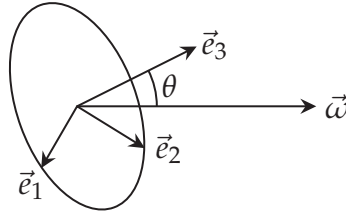
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= (I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3) \vec{e}_1 \\ &\quad + (I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3) \vec{e}_2 \\ &\quad + (I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique conduit aux équations d'Euler :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3, \\ \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3, \\ \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned}}$$

Les applications de ces équations sont multiples et fascinantes.

Exemple. Équilibrage d'une roue Une roue est bien équilibrée si elle tourne autour d'un de ses axes d'inerties, disons $\vec{e}_3$.



Dans ce cas, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega = \text{cte}$, et $\vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} = \vec{0}$. Il n'y a pas de moment exercé sur les axes, et on ne sent pas la rotation des roues.

Si par contre $\vec{\omega}$ n'est pas parfaitement aligné avec $\vec{e}_3$, le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tournant autour de $\vec{\omega}$, les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans ce repère sont données par

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin \theta \sin(\omega t) \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \cos(\omega t) \\ \omega_3 = \omega \cos \theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) \\ \dot{\omega}_2 = -\omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} .$$

Par ailleurs, $I_1 = I_2 = I_{\perp}$ et $I_3 = I_{\parallel}$. On en déduit que les composantes de $\vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}}$ sur $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont pas nulles, mais sont données par

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) , \\ \vec{\mathcal{M}}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) . \end{aligned}$$

Le moment des forces exercées sur la roue dépend du temps de façon périodique, d'où les vibrations de fréquence ω ressenties, et des contraintes sur les axes. En plaçant des masses sur la jante, le garagiste parvient à réaligner $\vec{e}_3$ avec l'axe de rotation de la roue.

Solide en rotation libre Considérons un solide en rotation autour d'un point fixe O tel qu'en ce point le moment des actions extérieures soit nul. Ce serait par exemple le cas d'un objet soumis à la seule action de la pesanteur dans le référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel, G est fixe et le moment du poids en G est nul puisqu'il s'applique en G .

Proposition. Toute rotation autour d'un axe principal d'inertie est stationnaire.

Preuve. Dans ce cas, les équations d'Euler se réduisent à

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} .$$

Elles ont trois solutions évidentes :

- $\omega_1 = \text{cte}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ et l'on a une rotation stationnaire autour de l'axe principal de moment I_1 ;
- $\omega_2 = \text{cte}$ et $\omega_1 = \omega_3 = 0$;
- $\omega_3 = \text{cte}$ et $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Exemple. La rotation d'un ballon de rugby autour de son axe de révolution est stationnaire. De même, la rotation autour d'un axe perpendiculaire à cet axe est stationnaire. Par contre, la rotation par rapport à un axe quelconque ne l'est pas. Si par contre l'on considère un ballon de foot, qui est sphérique, tout axe est un axe principal d'inertie, et toute rotation est stationnaire.

Stabilité des solutions. Supposons que $\dot{\omega}_1 = 0$, alors $\omega_1 = \text{cte}$. Considérons de petites variations autour de $\omega_2 = \omega_3 = 0$. D'après les équations d'Euler, on a

$$\begin{cases} I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 = 0 \\ I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases} ,$$

qui mène à

$$\begin{cases} I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \omega_1^2 \omega_2 = 0 \\ I_3 I_2 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)(I_3 - I_1) \omega_1^2 \omega_3 = 0 \end{cases} .$$

ω_2 et ω_3 vont décrire de petites oscillations tant que l'équation est de la forme

$$A\ddot{x} + Bx = 0 \quad \text{avec} \quad A \text{ et } B > 0 ,$$

soit

$$(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0 \implies I_1 > I_2, I_3 \quad \text{ou} \quad I_1 < I_2, I_3 .$$

Proposition. Conclusion : Les oscillations sont stables si elles ont lieu autour d'un axe correspondant au plus grand ou au plus petit des moments d'inertie, mais pas au moment d'inertie intermédiaire.

2. Gyroscopie

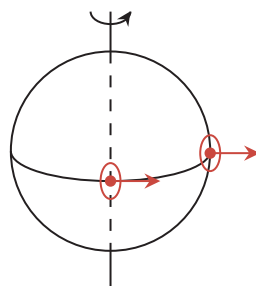
Définition (Gyroscopie). Un gyroscopie est un solide de révolution tournant autour de son axe, en général à très grande vitesse $\vec{\Omega}$, et suspendu par son centre de masse G de façon parfaite, c'est-à-dire pouvant choisir librement son orientation sans aucune résistance.

Proposition. Dans un référentiel galiléen, $\vec{\Omega} = \vec{cte}$.

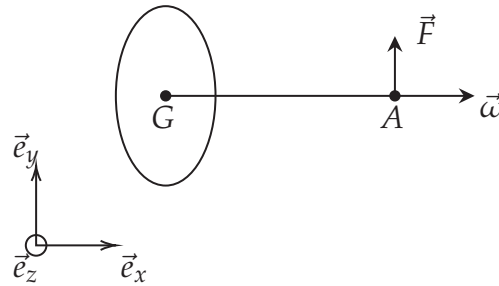
Preuve. $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{0}$ puisque les seules forces, le poids et la réaction au point de fixation, passent par G et ont un moment nul. Or, comme le gyroscopie tourne autour de son axe de révolution, qui est un axe principal d'inertie, $\vec{L}_G = I\vec{\Omega}$. Donc,

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0} .$$

Application. Dans le référentiel de Ptolémée, qui est une bonne approximation d'un référentiel galiléen, $\vec{\Omega}$ est constant. Or, la Terre tourne sur elle-même. Donc le gyroscopie tourne par rapport à la Terre pour garder une orientation fixe par rapport à un point du ciel déterminé par des étoiles fixes. À l'équateur, si son axe est horizontal à midi, il est vertical à 18 h.



Comportement paradoxal. Si l'on applique une force verticale sur un gyroscope d'axe horizontal, il dévie dans le plan horizontal.



Explication. On a

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F} = GAF\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = GAF\vec{e}_z,$$

soit

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{GAF}{I}\vec{e}_z,$$

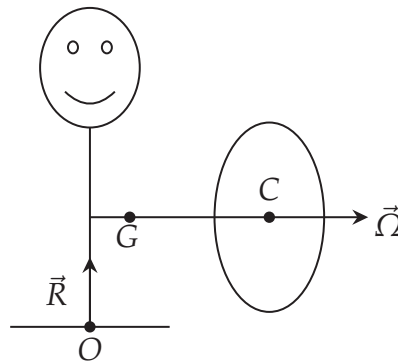
qui est parallèle à $\vec{e}_z$ et donc orthogonal à $\vec{F}$!

3. Effets gyroscopiques

On parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un objet de révolution (disque, roue, *etc.*) dont la rotation autour de son axe a pour effet de résister aux changements de son orientation.

Exemples.

1. Personne sur tabouret avec roue de vélo en rotation.



Il y a deux forces extérieures :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \underbrace{M\vec{g}}_{\text{poids total}} + \underbrace{\vec{R}}_{\text{réaction du sol}}.$$

Toutes les forces sont verticales :

$$\vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{R} \perp \vec{R} \implies \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Ainsi, $\frac{d(\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z)}{dt} = 0$, où $\vec{L}_G$ est le moment cinétique total en G. Au départ, $\vec{L}_G = \vec{L}_C^* + \overrightarrow{GC} \wedge m\vec{v}_C$, où m est la masse de la roue et $\vec{v}_C = \vec{0}$ est la vitesse du centre de la roue. On a aussi

$$\vec{L}_C^* = I\vec{\Omega} \implies \vec{L}_G \cdot \vec{e}_z = I\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Si l'on change l'inclinaison de la roue, la conservation de $\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z$ implique une rotation du tabouret à la vitesse $\vec{\omega}$ telle que la composante $\vec{e}_z$ de $\vec{L}_G$ reste nulle. En effet, si $\vec{\omega} = \vec{0}$, on aurait

$$\vec{L}_G \cdot \vec{e}_z = I \vec{\Omega}' \cdot \vec{e}_z \neq 0$$

où $\vec{\Omega}'$ est la nouvelle orientation du vecteur rotation de la roue. Dans le cas où la roue est à la verticale de la tête de la personne, on a

$$\vec{L}_G = I(\Omega \vec{e}_z + \vec{\omega}) + I_{P+T} \vec{\omega},$$

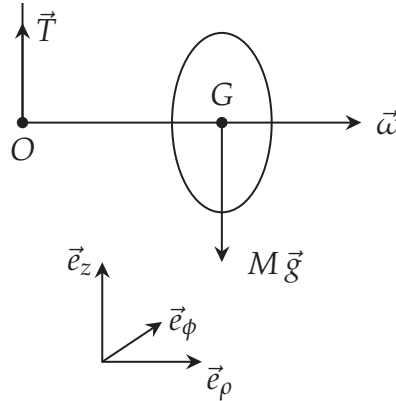
avec I_{P+T} le moment d'inertie par rapport à $\vec{e}_z$ de la personne et du tabouret.

Par conservation du moment cinétique parallèle à $\vec{e}_z$, on a $\vec{L}_G = \vec{0}$ et donc

$$\vec{\omega} = -\frac{I}{I + I_{P+T}} \Omega \vec{e}_z.$$

On a un effet similaire si au départ le vecteur rotation de la roue est perpendiculaire à GC et horizontal, et qu'on fait pivoter la roue pour que sa vitesse $\vec{\Omega}$ acquière une composante verticale.

2. Roue de vélo suspendue en un point de son axe de rotation.



Le théorème du moment cinétique en G conduit à :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* = \vec{GO} \wedge \vec{T} \quad \text{avec} \quad \vec{L}_G^* = I \vec{\omega}.$$

Démontrons qu'il existe une solution où le centre de masse G effectue une rotation uniforme autour de O . D'après la deuxième loi de Newton, on a : $\vec{T} = -\vec{P} + M\vec{a}_G$, et donc

$$\vec{GO} \wedge \vec{T} = \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{GO} \wedge M\vec{a}_G.$$

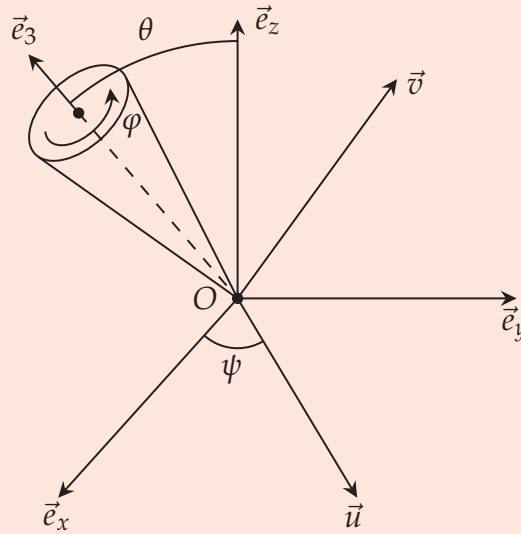
Mais si le point G effectue un mouvement de rotation uniforme, $\vec{a}_G$ est centripète, et $\vec{GO} \wedge M\vec{a}_G = \vec{0}$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* = \vec{OG} \wedge M\vec{g} \implies I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = OGMg \vec{e}_\phi.$$

L'axe de la roue reste dans le plan horizontal et tourne autour du point O , ce qui est compatible avec l'hypothèse que G effectue un mouvement de rotation uniforme. C'est un mouvement de précession.

4. Toupie

Définitions (Toupie, angles d'Euler). Une toupie est un objet à symétrie de révolution qui tourne autour de son axe de révolution, et dont l'une des extrémités est fixe. Il est commode de prendre cette extrémité comme origine du repère.



Il est commode de repérer la toupie par trois angles dits **angles d'Euler**. Les mouvements associés sont

$$\begin{cases} \dot{\phi} \vec{e}_3 : \text{rotation propre;} \\ \dot{\psi} \vec{e}_z : \text{précession;} \\ \dot{\theta} \vec{u} : \text{nutation;} \end{cases}$$

avec $\vec{e}_3$ l'axe de révolution de la toupie, $\vec{u}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_3$ et $\vec{v} = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$.

NB : Les vecteurs $\vec{e}_3$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont reliés aux vecteurs de base en coordonnées sphériques par $\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_r$, $\vec{u} = \vec{e}_\phi$ et $\vec{v} = -\vec{e}_\theta$, avec $\psi \equiv \phi$.

Dans l'**approximation gyroscopique**, on suppose que la vitesse de rotation propre est beaucoup plus grande que les autres. Dans ces conditions, le moment cinétique au point O est le long de $\vec{e}_3$, et le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m \vec{g} \simeq \vec{L}_O \wedge m \vec{g} \frac{\ell}{L_O} = \frac{mg\ell}{L_O} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$$

avec $\ell = OG$. Le vecteur $\vec{L}_O$, et donc la toupie, ont un mouvement de précession autour de la verticale $\vec{e}_z$, avec une vitesse angulaire

$$\dot{\psi} = \frac{mg\ell}{L_O} = \frac{mg\ell}{I_3 \dot{\phi}}.$$

La vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre.

Un traitement plus détaillé basé sur les équations d'Euler permet de montrer qu'il y a aussi un mouvement de nutation autour d'une valeur de θ , avec des oscillations entre θ_1 et θ_2 . Il existe néanmoins des solutions particulières $\theta = \theta_0$ constant, auquel cas le mouvement est un pur mouvement de précession.

Remarque. Pour passer de l'équation

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{mg\ell}{L_O} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$$

à la conclusion qu'il s'agit d'un mouvement de précession, on peut se reporter à la démonstration de la section II. du chapitre 2 du fait que l'équation $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ conduit à une précession de $\vec{OM}$ autour de $\vec{\omega}$.

Complément (Traitement détaillé de la toupie). Il est commode d'introduire le vecteur $\vec{v}$ qui forme avec $\vec{e}_3$ et $\vec{u}$ un repère orthonormé :

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{v}.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{e}_3 + \dot{\psi} \vec{e}_z \\ &= \dot{\theta} \vec{u} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}_3 + \dot{\psi} \sin \theta \vec{v}. \end{aligned}$$

Dans le référentiel de la toupie, on a donc $\omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$.

Le moment cinétique par rapport à O est donné par

$$\vec{L}_O = I_1 \dot{\theta} \vec{u} + I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}_3 + I_1 \dot{\psi} \sin \theta \vec{v},$$

où I_3 est le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution et I_1 le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par O (donc en particulier les axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$).

Le moment du poids par rapport à O est donné par

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \ell \vec{e}_3 \wedge m \vec{g} = -mg\ell (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_z).$$

Il en découle que

$$\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{e}_z = 0.$$

La première équation implique que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Or,

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 = -\dot{\theta} \vec{v} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{u},$$

ce qui implique que

$$\vec{L}_O \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \vec{e}_3) = 0,$$

et donc que

$$L_3 \equiv \vec{L}_O \cdot \vec{e}_3 = I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{cte.}$$

Par ailleurs, $\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{e}_z = 0$ implique que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \vec{e}_z) = 0$$

et finalement

$$L_z \equiv \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta = \text{cte.}$$

Enfin, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}^2 + I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) , \\ V &= mg\ell \cos \theta , \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mg\ell \cos \theta = \text{cte.}}$$

En utilisant les constantes L_3 et L_z , on peut éliminer $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$ de l'énergie mécanique. En effet,

$$L_z = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \frac{L_3}{I_3} .$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + mg\ell \cos \theta$$

ou encore

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) ,$$

avec

$$V_{\text{eff}}(\theta) = mg\ell \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} .$$

Ce potentiel a un minimum en θ_0 défini par

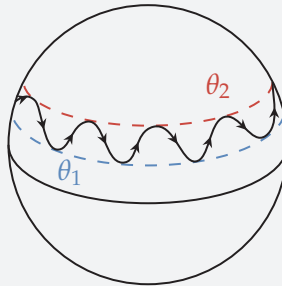
$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = -mg\ell \sin \theta + \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} L_3 \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} \cos \theta = 0 .$$

Posons $E_0 = V_{\text{eff}}(\theta_0)$.

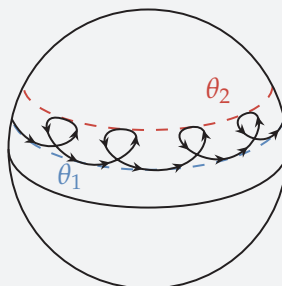
- Si $E > E_0$, alors θ oscille entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .
- Si $E = E_0$, alors $\theta = \theta_0 = \text{cte.}$

Nature du mouvement. Pour $E > E_0$, comme $\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$, deux cas de figure peuvent se présenter.

- $\dot{\psi}$ ne change pas de signe entre θ_1 et θ_2 : le centre de masse oscille simplement sur la sphère de rayon ℓ .



- $\dot{\psi}$ change de signe entre θ_1 et θ_2 : le centre de masse fait des boucles.



Pour $E = E_0$, θ_0 est donné par $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}(\theta_0) = 0$. Cette condition sur θ_0 peut se réécrire en fonction de $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$:

$$-mg\ell \sin \theta_0 + \dot{\psi} I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta_0) \sin \theta_0 - I_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0.$$

Dans le cas générique où $\theta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, on en déduit

$$\dot{\psi}^2 (I_3 \cos \theta_0 - I_1 \cos \theta_0) + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} - mg\ell = 0,$$

ou encore, en supposant $I_1 > I_3$,

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + mg\ell = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en $\dot{\psi}^2$ est

$$\Delta = I_3^2 \dot{\phi}^2 - 4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0.$$

Pour $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, un tel mouvement n'existe que si

$$I_3 \dot{\phi} > \sqrt{4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0} \equiv I_3 \dot{\phi}_{\min}.$$

Si $\dot{\phi} > \dot{\phi}_{\min}$, alors il existe deux mouvements de précession :

$$\dot{\psi}_{\pm} = \frac{I_3 \dot{\phi} \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\phi}^2 - 4mg\ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2(I_1 - I_3) \cos \theta_0}.$$

On peut montrer que c'est le mouvement de précession le plus lent décrit par $\dot{\psi}_{-}$ qui est stable, et donc que c'est lui qui doit être observé.