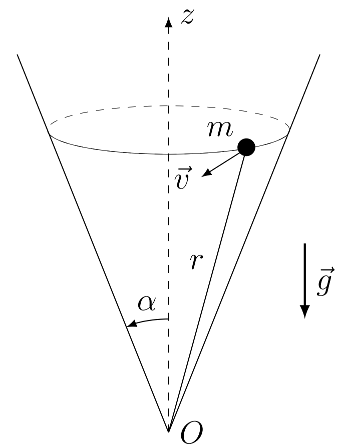
1 Point sur un cône (12 points)

Enoncé

Un point matériel de masse m, soumis à la pesanteur, est contraint à se déplacer sans frottement sur un cône de révolution de sommet O s'ouvrant vers le haut avec un demi-angle d'ouverture α ($0 < \alpha < \pi/2$, $z > 0$), comme indiqué sur le dessin. On notera Oz l'axe de symétrie du cône.



a) Choisir un système de coordonnées et exprimer la contrainte géométrique de contact entre le point matériel et le cône dans ces coordonnées. Représenter sur un dessin le repère associé à ces coordonnées.

b) Ecrire les équations du mouvement, et les projeter sur les axes du repère.

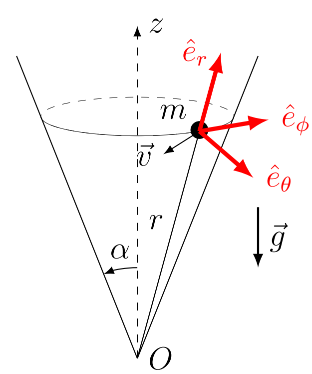
c) Donner l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$ du point matériel par rapport à O. Montrer que sa composante verticale, L_z, est égale à $mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha$, puis que L_z est une constante du mouvement.

d) Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E en fonction de L_z, de la distance r du point matériel au point O, et des données du problème. L'énergie mécanique E du point matériel est-elle une constante du mouvement ? Justifier votre réponse.

Corrigé

a) (2 points au total)

Repère en coordonnées sphériques , avec variables : r, $\theta = \alpha =$ constante , ϕ.



b) (4 points au total)

En coordonnées sphériques, le vecteur position, $\vec{r}$, et ses dérivées :

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \tag{1}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi \tag{2}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)\,\hat{e}_r - r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\alpha + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha)\,\hat{e}_\phi \tag{3}$$

Les forces sont le poids, $m\vec{g}$, et la force de liaison, $\vec{N}$

$$m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\hat{e}_r + \sin\alpha\,\hat{e}_\theta) \tag{4}$$

$$\vec{N} = N_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{5}$$

Les équations du mouvement sont donnée par la deuxième loi de Newton, $m\vec{g} + \vec{N} = m\ddot{\vec{r}}$. En projection sur les axes du repère :

$$-mg\cos\alpha = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha \tag{6}$$

$$mg\sin\alpha + N_\theta = -mr\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha \tag{7}$$

$$0 = mr\ddot{\phi}\sin\alpha + 2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha \tag{8}$$

c) (3 points au total)

$$\vec{L}_O = \vec{r}\wedge m\vec{v} = r\,\hat{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi) = -mr^2\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\theta \tag{9}$$

$$L_z = \vec{L}_O\cdot\vec{z} = \vec{L}_O\cdot(\cos\alpha\,\hat{e}_r - \sin\alpha\,\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha \tag{10}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\alpha + mr^2\ddot{\phi}\sin^2\alpha = r\sin\alpha(\underbrace{2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha + mr\ddot{\phi}\sin\alpha}_{=0\,(\text{cf.Eq.}(8))}) = 0 \tag{11}$$

Donc la composante L_z est constante.

Solution alternative : Puisque aucune des forces n'a de composante selon $\hat{e}_\phi$, les moments des forces par rapport à O n'ont pas de composante selon z. La composante L_z est donc constante.

d) (3 points au total)

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha) + mgr\cos\alpha \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \tag{13}$$

où l'on a utilisé l'équation (10) pour éliminer la dépendance en $\dot{\phi}^2$.

Le poids est une force conservative, et la force le liaison ne travaille pas, donc l'énergie mécanique est constante.

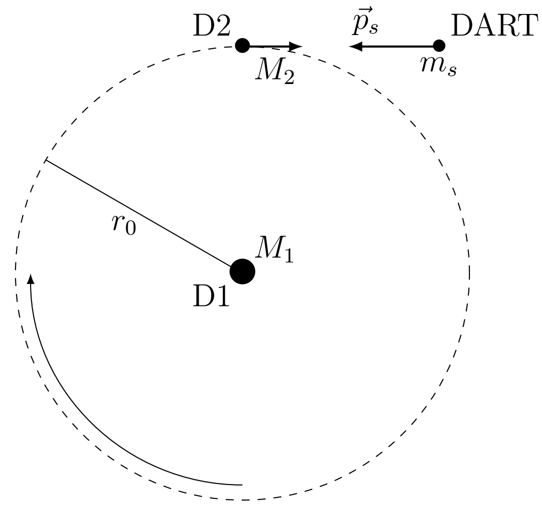
Solution alternative (1) : Par dérivation de l'expression pour l'énergie mécanique, et en utilisant l'équation (6), on trouve que $dE/dt = 0$, sont l'énergie mécanique est constante.

Solution alternative (2) : Par intégration de l'équation (6), on trouve une intégrale première, que l'on identifie avec l'énergie mécanique. Puisque c'est une intégrale première du mouvement, l'énergie mécanique est constante.

2 Mission DART (14 points)

Enoncé

En septembre 2022, la mission DART de la NASA a testé la possibilité de dévier la trajectoire d'un astéroïde par l'impact d'un projectile. Le système choisi pour ce test consiste en un astéroïde principal D1, de masse M_1, autour duquel orbite un plus petit objet D2, de masse M_2 très petite par rapport à M_1. On peut donc travailler dans un référentiel $\mathcal{R}$, supposé d'inertie, dans lequel D1 est au repos. Les deux astéroïdes sont considérés comme des points matériels, et seule la force gravitationnelle entre D1 et D2 est prise en compte.



a) L'orbite initiale de D2 autour de D1 est circulaire, de rayon r_0 et de période T_0. Déterminer la masse M_1 en fonction de ces données, ainsi que de la constante G de gravitation universelle. *Indication : on pourra écrire les équations du mouvement pour D2.*

La sonde DART, de masse m_s (négligeable par rapport à M_2 et M_1), doit entrer en collision avec D2. Juste avant la collision, la sonde a une quantité de mouvement $\vec{p}_s$, tangente à l'orbite de D2, et de sens opposé au vecteur vitesse de D2 comme indiqué sur le dessin. Le choc est frontal et parfaitement mou. Après le choc, l'astéroïde D2 a une nouvelle orbite, elliptique, autour de D1.

b) Calculer V_2, la vitesse de D2 juste après le choc.

c) Quelles sont les quantités conservées dans l'orbite de D2 ? Justifier votre réponse. Exprimer l'égalité de ces quantités à l'apogée (point le plus éloigné de D1) et au périgée (point le plus proche de D1) de l'orbite elliptique.

d) Calculer la nouvelle période orbitale T de D2, en fonction de T_0, r_0, V_2, M_1, et G.
Indication : commencer par calculer le grand axe de l'orbite à l'aide des résultats de la question c).

Corrigé

a) (4 points au total)

On considère le système D2 sur lequel la seule force appliquée est la force de gravitation universelle, de norme

$$F = \frac{GM_1M_2}{r_0^2} . \tag{14}$$

Le mouvement est circulaire uniforme, donc l'accélération vaut v_0^2/r_0, d'où la deuxième loi de Newton peut être écrite comme

$$\frac{GM_1M_2}{r_0^2} = M_2\frac{v_0^2}{r_0} , \tag{15}$$

et la vitesse v_0 de D2 sur son orbite est mesurée comme

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}\,, \tag{16}$$

On en déduit que

$$\frac{GM_1M_2}{r_0^2} = M_2\frac{4\pi^2 r_0}{T_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad M_1 = 4\pi^2\frac{r_0^3}{GT_0^2}\,. \tag{17}$$

b) (2 points au total)
Dans le choc, la quantité de mouvement est conservée, et les vitesses finales de D2 et de la sonde sont égales (V_2) :

$$M_2v_0 - \underbrace{m_sv_s}_{=p_s} = (M_2+m_s)V_2\,. \tag{18}$$

La vitesse V_2 vaut donc

$$V_2 = \frac{M_2v_0 - p_s}{M_2+m_s} \simeq \frac{M_2v_0-p_s}{M_2} = v_0 - \frac{p_s}{M_2}\,. \tag{19}$$

c) (4 points au total)
La seule force qui s'applique sur D2 est la force de gravitation. Cette force est centrale et conservative. Les quantités conservées sont donc le moment cinétique (car le mouvement central) et l'énergie mécanique (car la force est conservative).
On considère ces quantités à l'apogée (r_0 et V_2) et au périgée (r_0' et V_2') :

$$(L_O =)\, r_0M_2V_2 = r_0'M_2V_2' \qquad \Rightarrow \qquad V_2' = \frac{r_0}{r_0'}V_2 \tag{20}$$

$$(E_{\text{mec}} =)\, \frac{1}{2}M_2V_2^2 - \frac{GM_1M_2}{r_0} = \frac{1}{2}M_2V_2'^2 - \frac{GM_1M_2}{r_0'}\,. \tag{21}$$

d) (4 points au total)
On récrit l'équation (21) sous la forme

$$\frac{1}{2}\left[V_2^2 - V_2'^2\right] = GM_1\left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right]\,, \tag{22}$$

et on substitue l'expression de l'équation (20)

$$\frac{1}{2}V_2^2\underbrace{\left[1-\left(\frac{r_0}{r_0'}\right)^2\right]}_{=\left[1-\frac{r_0}{r_0'}\right]\left[1+\frac{r_0}{r_0'}\right]} = \frac{GM_1}{r_0}\left[1-\frac{r_0}{r_0'}\right]\,. \tag{23}$$

Par simplification, on trouve

$$\frac{r_0}{r_0'} = \frac{2GM_1}{r_0V_2^2} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad r_0' = \frac{r_0V_2^2}{2GM_1 - r_0V_2^2}\,. \tag{24}$$

Finalement, on applique la troisième loi de Kepler pour déterminer la période T

$$\frac{T_0^2}{(2r_0)^3} = \frac{T^2}{(r_0+r_0')^3} \qquad \Rightarrow \qquad T = \left(\frac{r_0+r_0'}{2r_0}\right)^{3/2}T_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{r_0'}{r_0}\right)^{3/2}T_0\,. \tag{25}$$

En combinant ces deux dernières équations, on trouve

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{r_0 V_2^2}{2GM_1 - r_0 V_2^2} \right)^{3/2} T_0 \tag{26}$$

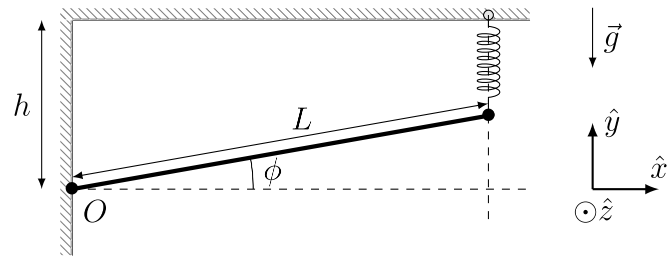
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{2GM_1}{r_0 V_2^2} - 1} \right)^{3/2} T_0 \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\frac{2GM_1}{r_0 V_2^2}}{\frac{2GM_1}{r_0 V_2^2} - 1} \right)^{3/2} T_0 \tag{28}$$

3 Microscope à force atomique (15 points)

Enoncé

Un microscope à force atomique est constitué d'une tige rigide de masse M, de longueur L et de diamètre négligeable. La tige est attachée à un support immobile à l'une de ses extrémités (O) formant un angle ϕ avec l'horizontale. L'autre extrémité est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. On restraint l'étude à $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.



Le ressort est attaché au support à une hauteur h au dessus du point O, de manière à rester vertical à tout instant, et le mouvement s'effectue dans le plan vertical contenant le ressort et la tige.

Indication : le moment d'inertie de la tige par rapport à son centre de masse est $I_G = \frac{ML^2}{12}$.

a) Enumérer les forces appliquées sur la tige avec leur point d'application et les représenter sur un dessin. Donner leurs expression en fonction de ϕ et des données du problème.

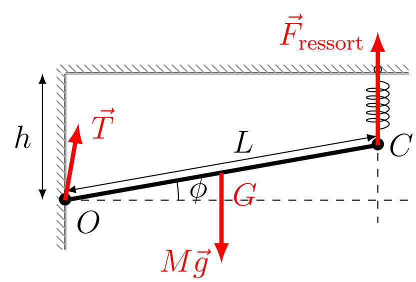
b) On considère la situation d'équilibre statique. Calculer l'angle ϕ_e qui réalise l'équilibre statique. Donner une condition reliant k et les données du problème pour que $\phi_e = 0$.

c) On considère maintenant le mouvement de la tige autour de la position d'équilibre $\phi_e = 0$. Donner une équation différentielle pour ϕ. Dans cette équation différentielle, utiliser l'approximation des petits angles ($\phi \simeq 0 \implies \sin\phi \simeq \phi$ et $\cos\phi \simeq 1$) et en déduire la période des oscillations autour de la position d'équilibre.

Corrigé

a) (3 points au total)

On décrit le mouvement dans le repère $Oxyz$ centré en O. On note qu'avec le repère proposé et les notations choisies, l'angle ϕ correspond aux coordonnées cylindriques. Les forces qui s'appliquent sur la tige sont :



— La force de pesanteur en G, $-Mg\hat{y}$
— La tension du ressort en C, $-k(y-h)\hat{y} = -k(L\sin\phi - h)\hat{y}$
— La force de liaison en O, $\vec{T} = T_x\hat{x} + T_y\hat{y}$

b) (4 points au total) *Voie utilisant l'énergie*

La pesanteur et la force du ressort sont conservatives, et la force de liaison ne travaille pas donc l'énergie mécanique est conservée . La situation d'équilibre est celle qui minimise l'énergie potentielle totale :

$$V(\phi) = Mg\frac{L}{2}\sin\phi + \frac{1}{2}k(L\sin\phi - h)^2 \tag{29}$$

Donc

$$V'(\phi_e) = 0 = Mg\frac{L}{2}\cos\phi_e + kL\cos\phi_e(L\sin\phi_e - h) \tag{30}$$

$$L\sin\phi_e = h - \frac{Mg}{2k} \tag{31}$$

ou nous avons utilisé le fait que $\pm\pi/2$ est exclu. On devrait aussi vérifier que le sinus reste bien entre -1 et 1, pour lequel la seule solution serait $\cos\phi_e = 0$ (ignorer ce point pour la correction)

Voie utilisant l'équilibre des forces et des moments

La situation d'équilibre est atteinte lorsque les forces et les moments de forces sont équilibrés . On peut calculer les moments au point O :

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{OG} \wedge M\vec{g} + \vec{OC} \wedge -k(L\sin\phi - h)\hat{y} && (32)\\
&= (L/2\cos\phi\hat{x} + L/2\sin\phi\hat{y}) \wedge -Mg\hat{y} + (L\cos\phi\hat{x} + L\sin\phi\hat{y}) \wedge -k(L\sin\phi - h)\hat{y} && (33)\\
&= -\frac{MgL}{2}\cos\phi\hat{z} - kL\cos\phi(L\sin\phi - h)\hat{z} && (34)
\end{aligned}$$

Donc la condition d'équilibre est

$$L\sin\phi_e = h - \frac{Mg}{2k} \tag{35}$$

La condition $\phi_e = 0$ s'écrit

$$h - \frac{Mg}{2k} = 0 \implies k = \frac{Mg}{2h} \tag{36}$$

c) (8 points au total)

Le mouvement de rotation de la tige est un mouvement plan/plan donc $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z}$ (on peut utiliser le fait que c'est le vecteur de rotation des coordonnées cylindriques). Le mouvement s'effectue autour de l'axe y qui est un axe principal de la tige donc $\tilde{I}_O\vec{\omega} = I_{Oy}\vec{\omega}$, avec I_{yO} le moment principal de la tige par rapport à O dans la direction y.

On obtient I_{yO} par la formule de Huygens-Steiner $I_{yO} = I_{yG} + M\frac{L^2}{4} = M\frac{L^2}{3}$.

Voie utilisant l'énergie

On peut obtenir une equation différentielle à partir de la conservation de l'énergie $\frac{dE}{dt} = 0$.

L'énergie cinétique totale est donc donnée par

$$K = \frac{1}{2}I_{Oy}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{Oy}\dot{\phi}^2 \tag{37}$$

et l'énergie mécanique totale est

$$E = \frac{1}{2}I_{Oy}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{Oy}\dot{\phi}^2 + Mg\frac{L}{2}\sin\phi + \frac{1}{2}k(L\sin\phi - h)^2 \tag{38}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} = 0 &= I_{Oy}\dot{\phi}\ddot{\phi} + Mg\frac{L}{2}\cos\phi\dot{\phi} + k(L\sin\phi - h)L\cos\phi\dot{\phi} && (39)\\
0 &= I_{Oy}\ddot{\phi} + Mg\frac{L}{2}\cos\phi + k(L\sin\phi - h)L\cos\phi && (40)
\end{aligned}$$

Voie utilisant les equations du mouvement

On applique le théorème du moment cinétique en O :

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O \tag{41}$$

Le moment cinétique est

$$\vec{L}_O = \tilde{I}_O \vec{\omega} = I_{yO} \dot{\phi} \hat{z} \tag{42}$$

Le moment des forces extérieures en O est :

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{OG} \wedge M\vec{g} + \vec{OC} \wedge -k(L\sin\phi - h)\hat{y} && (43)\\
&= (L/2\cos\phi\hat{x} + L/2\sin\phi\hat{y}) \wedge -Mg\hat{y} + (L\cos\phi\hat{x} + L\sin\phi\hat{y}) \wedge -k(L\sin\phi - h)\hat{y} && (44)\\
&= -\frac{MgL}{2}\cos\phi\hat{z} - kL\cos\phi(L\sin\phi - h)\hat{z} && (45)
\end{aligned}$$

Par le théorème du moment cinétique, l'équation différentielle pour ϕ est :

$$I_{yO}\ddot{\phi}\hat{z} = -\frac{MgL}{2}\cos\phi\hat{z} - kL\cos\phi(L\sin\phi - h)\hat{z} \tag{46}$$

Avec l'approximation des petits angles, on a

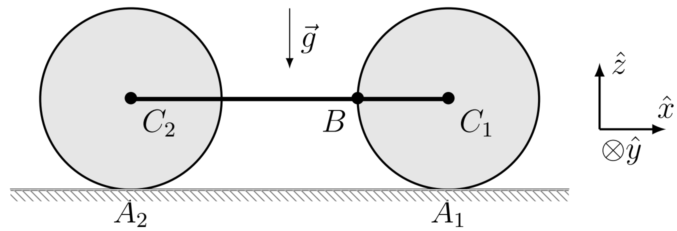
$$\begin{aligned}
I_{Oy}\ddot{\phi} + Mg\frac{L}{2} + k(L\phi - h)L = 0 && (47)\\
\ddot{\phi} + \frac{kL^2}{I_{Oy}}\phi = -Mg\frac{L}{2I_{Oy}} + \frac{khL}{I_{Oy}} && (48)\\
\ddot{\phi} + \frac{3k}{M}\phi = -\frac{3g}{2L} + \frac{3kh}{ML} && (49)
\end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{kL^2}{I_{Oy}}} = \sqrt{\frac{3k}{M}}$, donc la période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

4 Freinage à vélo (18 points)

Enoncé

Un vélo circule en ligne droite sur une route horizontale. On modélise les roues du vélo par des anneaux minces identiques, de masse m et de rayon R. Le moment d'inertie de chacune des roues par rapport à son axe est mR^2. Une tige rigide, sans masse et de longueur $L > 2R$ relie les centres C_1 et C_2 des deux roues, comme indiqué sur le dessin.



On considère d'abord que les deux roues reposent sur le sol et roulent sans glisser sur celui-ci. *Les questions c) et d) peuvent être résolues indépendamment de la question b).*

a) Enumérer les forces externes appliquées sur le système $\{\text{tige} + \text{deux roues}\}$, et les représenter sur un dessin avec leurs points d'application. Donner leurs expressions dans le repère indiqué sur le dessin.

Dans une première situation, on freine avec la roue avant : la tige et la roue avant sont alors en contact au point B, de sorte que la tige exerce sur la roue une force constante $\vec{F}_B = -F_B\hat{z}$, avec $F_B > 0$. Le freinage produit une accélération pour le velo $\vec{a}_0 = -a_0\hat{x}$.

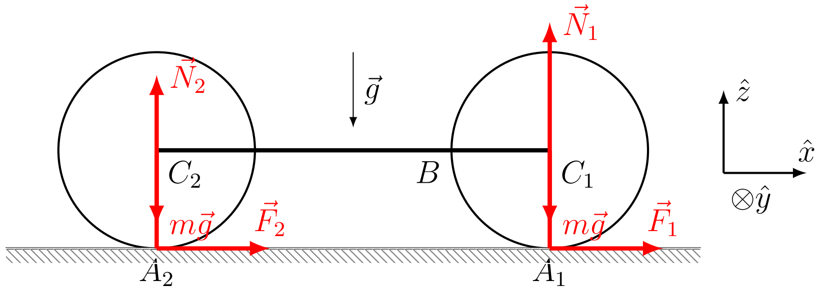
b) Exprimer la force de frottement entre la roue avant et le sol en fonction de a_0 et F_B, et des données du problème. *Indication : On pourra écrire les équations du mouvement pour la roue avant.*

Dans une autre situation, on freine pour bloquer les deux roues, qui sont maintenant reliées rigidement à la tige, formant un unique solide indéformable. Les roues glissent sur le sol, avec un coefficient de frottement cinétique identique pour les deux roues, noté μ_c. Ce freinage produit une accélération $\vec{a}_1 = -a_1\hat{x}$.

c) Exprimer a_1 en fonction de μ_c et des données du problème.

d) Donner une condition sur a_1 pour que la roue arrière décolle du sol sous l'effet du freinage.

Corrigé



a) (4 points au total)

On décrit le mouvement dans le repère $Oxyz$. Les forces qui s'appliquent sur le système sont :

— La force de pesanteur en C_1, $-Mg\hat{z}$
— La force de liaison en A_1, $N_1\hat{z}$
— La force de frottement en A_1, $F_1\hat{x}$
— La force de pesanteur en C_2, $-Mg\hat{z}$
— La force de liaison en A_2, $N_2\hat{z}$
— La force de frottement en A_2, $F_2\hat{x}$

b) (7 points au total)

On considère la roue avant comme système, et on applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse C_1 de la roue. Le plan de la roue reste dans le plan xz du référentiel, c'est un mouvement plan sur plan, donc le vecteur vitesse de rotation s'écrit $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$.

L'axe de rotation y est un axe principal de la roue, donc le moment cinétique de la roue par rapport à son centre de masse est $\vec{L}_{C_1} = mR^2\omega\hat{y}$ (on peut invoquer le théorème de König pour justifier de l'absence d'un terme supplémentaire, comme on considère le centre de masse).

Il y a roulement sans glissement en A_1, donc $\vec{v}_{C_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} = \omega R\hat{x}$.

Or l'accélération du vélo est $\vec{a}_0$, donc

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_{C_1} \implies \dot{\omega}R\hat{x} = -a_0\hat{x} \tag{50}$$

donc $\dot{\omega}R = a_0$.

C_1 est en mouvement dans le référentiel, cependant c'est le centre de masse du système donc le théorème du moment cinétique s'applique sous sa forme simple :

$$\frac{d\vec{L}_{C_1}}{dt} = \vec{M}_{C_1} \tag{51}$$

$$mR^2\dot{\omega}\hat{y} = \vec{C_1A_1} \wedge \vec{F}_1 + \vec{C_1B} \wedge \vec{F}_B \tag{52}$$

$$-mRa_0\hat{y} = -R\hat{z} \wedge F_1\hat{x} - R\hat{x} \wedge (-F_B\hat{z}) \tag{53}$$

$$F_1 = ma_0 - F_B \tag{54}$$

c) (3 points au total)

Le théorème du centre de masse appliqué au solide {tige + deux roues} s'écrit :

$$2m\vec{a}_1 = F_2\hat{x} + N_2\hat{z} + F_1\hat{x} + N_1\hat{z} - 2mg\hat{z} \tag{55}$$

Les forces de frottement s'expriment en fonction des forces de liaison avec la loi de Coulomb :

$$F_{1,2} = -\mu_c N_{1,2} \tag{56}$$

En projection sur les axes du repère, on obtient

$$\begin{cases} 0 & = N_1 + N_2 - 2mg \\ -2ma_1 & = F_1 + F_2 = -\mu_c(N_1 + N_2) \end{cases} \tag{57}$$

donc $a_1 = \mu_c g$.

d) (4 points au total)

Tant que le vélo reste horizontal, sa vitesse de rotation est nulle. Le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse s'exprime donc comme :

$$\vec{M}_G = 0 = G\vec{A}_1 \wedge (F_1\hat{x} + N_1\hat{z}) + G\vec{A}_2 \wedge (F_2\hat{x} + N_2\hat{z}) \tag{58}$$

$$0 = \left(\frac{L}{2}\hat{x} - R\hat{z}\right) \wedge (F_1\hat{x} + N_1\hat{z}) + \left(-\frac{L}{2}\hat{x} - R\hat{z}\right) \wedge (F_2\hat{x} + N_2\hat{z}) \tag{59}$$

$$0 = \frac{L}{2}\left(N_2 - N_1\right) - R\left(F_2 + F_1\right) \tag{60}$$

$$0 = \frac{L}{2}\left(N_2 - N_1\right) + \mu_c R\left(N_2 + N_1\right) \tag{61}$$

On en déduit

$$N_2\left(\frac{L}{2} + R\mu_c\right) = N_1\left(-\frac{L}{2} + R\mu_c\right) \tag{62}$$

La condition de décollement est $N_2 = 0$, ce qui donne $\mu_c = \frac{L}{2R}$, soit d'après la question c) $a_1 = \frac{gL}{2R}$.