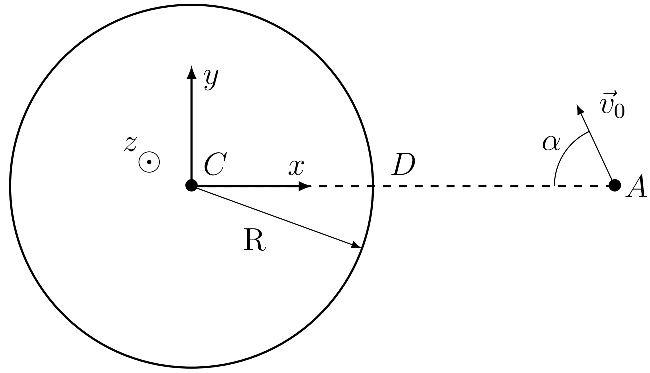
1 Astéroïde (17 points)

Enoncé

On étudie le mouvement d'un astéroïde A, considéré comme un point materiel de masse m. Le mouvement s'effectue au voisinage de la Terre, considérée comme une sphère homogène de rayon R et de masse M. On note C son centre, et on considère ce point comme fixe dans un référentiel d'inertie. On note $\vec{r} = \overrightarrow{CA}$ le vecteur position de l'astéroïde. La seule force exercée sur l'astéroïde est la force de gravitation de la Terre :



$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

A l'instant $t = 0$, l'astéroïde se trouve à une distance D du centre de la terre et a une vitesse $\vec{v_0}$, contenue dans le plan xy et faisant un angle α avec le vecteur $\overrightarrow{AC}$, comme indiqué sur le dessin.

a) Quelles sont les quantités conservées ? Justifier votre réponse. Donner leurs expressions en fonction des données du problème, dans un système de coordonnées polaires d'origine C. [6 pts]

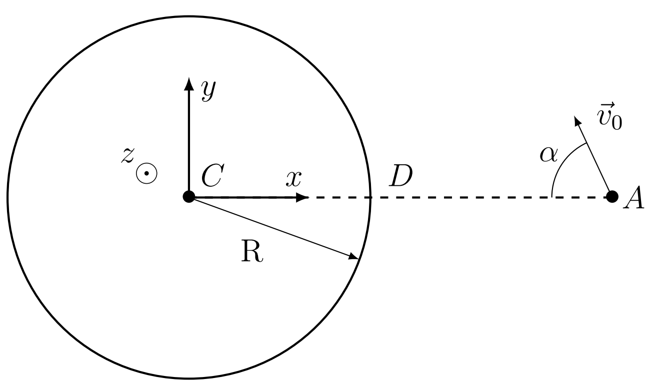
b) Donner une condition sur α et l'énergie mécanique initiale de l'astéroïde pour que ce dernier entre en contact avec la Terre au cours de son mouvement. [6 pts]

On se place dans la situation où l'astéroïde entre en collision avec la Terre. On considère que le choc est parfaitement mou (l'astéroïde et la Terre fusionnent). Avant le choc, la Terre est en rotation avec une vitesse $\vec{\omega}_i$. Après le choc, le système est considéré comme une sphère homogène de rayon R et de masse $m + M$.

c) Calculer le vecteur la vitesse instantanée de rotation $\vec{\omega}_f$ après le choc. L'axe de rotation de la Terre peut-il changer de direction en raison du choc ? Si oui à quelle condition ? [5 pts]

Indication : le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre C est $I_c = \frac{2}{5}MR^2$.

Corrigé



a) (6 points au total)
Les quantités conservées sont : l'énergie totale, parce que la force gravitationelle est conservative, et le moment cinétique, parce que la force est centrale.

L'énergie et le moment cinétique peuvent être écrits en cordonnées polaires dans le plan (x, y) :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r} \quad (1)$$

$$\vec{L}_c = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{e_z} \quad (2)$$

Avec les conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{D} \quad (3)$$

$$L_c = mDv_0 \sin\alpha \quad (4)$$

b) (6 points au total)
La conservation du moment cinétique permet d'exprimer la vitesse angulaire en fonction du moment cinétique : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_c^2}{m^2r^4}$.
Par conséquent,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad (5)$$

$$V_{eff}(r) = \frac{L_c^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \quad (6)$$

$$(7)$$

Le rayon minimum vérifie $E = V_{eff}(r_{min})$, donc $E = \frac{L_c^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$, qui donne l'équation :

$$r_{min}^2 + \frac{GmM}{E}r_{min} - \frac{L_c^2}{2mE} = 0\,. \quad (8)$$

La solution est :

$$r_{min} = \frac{1}{2}(-\frac{GmM}{E} \pm \sqrt{\Delta}) \quad (9)$$

$$\Delta = (\frac{GmM}{E})^2 + \frac{2L_c^2}{mE}\,. \quad (10)$$

Donc

$$r_{min} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{E}(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L_c^2E}{Gm^3M}}) \quad (11)$$

Pour que l'astéroïde entre en contact avec la Terre, il faut que $r_{min} = R$ qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{GmM}{E}(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L_c^2E}{Gm^3M}}) = R \quad (12)$$

Pour calculer la condition sur α, on écrit le moment cinétique comme $L_c = mDv_0 \sin\alpha$. Donc

$$-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2m^2D^2v_0^2\sin^2\alpha E}{Gm^3M}}) = \frac{2ER}{GmM} \quad (13)$$

$$\frac{2m^2D^2v_0^2E}{Gm^3M}\sin\alpha^2 = \left(\frac{2ER}{GmM} + 1\right)^2 - 1 \quad (14)$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{Gm^3M}{2m^2D^2v_0^2E}}\left(\left(\frac{2ER}{GmM} + 1\right)^2 - 1\right) \quad (15)$$

c) (5 points au total)

On considère le système Terre + astéroïde. Ce système est isolé donc le moment cinétique total par rapport à C est conservé (en fait il y a une force de liaison en C puisque la Terre est supposée immobile ; ignorer ce point pour la correction).

Le moment cinétique total s'écrit donc à l'instant initial :

$$\vec{L}_{in} = \vec{L}_{in,ast} + \vec{L}_{in,Terre} = mDv_0 \sin\alpha \hat{z} + \frac{2}{5} M R^2 \vec{\omega} \tag{16}$$

et à l'instant final :

$$\vec{L_f} = \frac{2}{5}(M+m)R^2 \vec{\omega_f} \tag{17}$$

donc

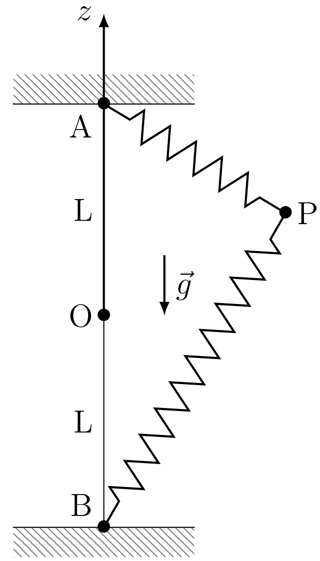
$$\vec{\omega_f} = \frac{M}{m+M}\vec{\omega} + \frac{5}{2}\frac{mDv_0 \sin\alpha}{(m+M)R^2}\hat{z} \tag{18}$$

Si $\vec{\omega}$ n'est pas dirigé suivant z, l'axe de rotation de la Terre va changer de direction.

2 Masse et ressorts (14 points)

Enoncé

On considère un point matériel P de masse m attaché à deux ressorts identiques de raideur k, de masse nulle et de longueur à vide nulle, chacun attaché à un point fixe comme indiqué sur le dessin. Les deux supports sont séparés d'une distance $2L$. Les points d'attache A et B sont alignés suivant la direction verticale. Le système est soumis à la pesanteur.



a) Donner la liste des forces exercées sur P, et leurs composantes en fonction des coordonnées de P, dans un système de coordonnées d'origine O. [3 pts]

b) Déterminer la position d'équilibre de P. [2 pts]

c) Ecrire les équations du mouvement pour P. [2 pts]

d) Calculer le moment cinétique de P par rapport au point O, et montrer que sa composante suivant l'axe z est conservée au cours du mouvement. [4 pts]

e) On déplace P d'une distance D dans une direction quelconque par rapport à sa position d'équilibre, et on le relâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Déterminer la position de P en fonction du temps pour $t > 0$ (équation horaire). [3 pts]

Corrigé

a) (3 points au total)

Les forces sont :
— La force $\vec{F}_1$ exercée par le ressort 1 ;
— La force $\vec{F}_2$ exercée par le ressort 2 ;
— La force de pesanteur $m\vec{g}$.

La loi de Hooke s'écrit pour les deux ressorts :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -k\overrightarrow{AP}\,,\\ \vec{F}_2 &= -k\overrightarrow{BP}\,.\end{aligned}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques centrées en O, on a $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$. Les forces s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) = -k(-L\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z)\\ \vec{F}_2 &= -k(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = -k(L\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z)\\ m\vec{g} &= -mg\hat{e}_z.\end{aligned}$$

Alternativement, dans un système de coordonnées cartésiennes centrées en O, les forces s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -k\overrightarrow{AP} = -k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) = -k((z-L)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y})\\ \vec{F}_2 &= -k\overrightarrow{BP} = -k(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = -k((z+L)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y})\\ m\vec{g} &= -mg\hat{z}\end{aligned}$$

b) (2 points au total)

La position d'équilibre doit vérifier $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$.

On obtient donc en projection dans les différentes directions :

$$\begin{aligned} -k(z+L) - k(z-L) - mg &= 0 \\ -2k\rho &= 0 \end{aligned}$$

ou en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} -k(z+L) - k(z-L) - mg &= 0 \\ -2kx &= 0 \\ -2ky &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} z_{eq} &= -\frac{mg}{2k} \\ \rho &= 0 \text{ ou } x = y = 0 \end{aligned}$$

c) (2 points au total)

Les équations du mouvement pour P sont obtenues par la 2ème loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} &= m\vec{a} \\ -2k\vec{r} - mg\hat{e}_z &= m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + m\left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\rho}\right)\hat{e}_\phi + m\ddot{z}\hat{e}_z \end{aligned}$$

En projection suivant les 3 directions :

$$\begin{cases} -2k\rho = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right) \\ 0 = m\left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\rho}\right) \\ -2kz - mg = m\ddot{z} \end{cases} \tag{19}$$

Alternativement, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} &= m\vec{a} \\ -2k\vec{r} - mg\hat{e}_z &= m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z} \end{aligned}$$

En projection suivant les 3 directions :

$$\begin{cases} -2kx = m\ddot{x} \\ -2ky = m\ddot{y} \\ -2kz - mg = m\ddot{z} \end{cases} \tag{20}$$

d) (4 points au total)

Le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_O = m(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}) \tag{21}$$

dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{L}_O = -mz\rho\dot{\phi}\hat{e}_\rho + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\hat{e}_\phi + m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z \tag{22}$$

dans le système de coordonnées cartésien :

$$\vec{L}_O = m(x\dot{y} - y\dot{x})\hat{z} + m(y\dot{z} - z\dot{y})\hat{x} + m(z\dot{x} - x\dot{z})\hat{y} \tag{23}$$

Par le théorème du moment cinétique, on a $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$ donc

$$\dot{L}_{Oz} = \vec{M}_O \cdot \hat{z} = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g}\right)\right) \cdot \hat{e}_z = ((\rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z) \wedge (-k\rho\hat{e}_\rho - mg\hat{e}_z)) \cdot \hat{e}_z = 0 \tag{24}$$

Alternativement : Tous les moments sont perpendiculaires au plan ABP, donc il n'y a pas de moments verticaux, et donc L_{Oz} est constant .

Alternativement : la compostante dans le plan horizontal de la résultante des forces est dirigée sur l'axe z (centrale) , donc L_{Oz} est constant .

e) (3 points au total)

Dans la situation initiale, la vitesse est nulle, donc la composante conservée du moment cinétique vaut $L_{Oz} = 0$, donc $\dot{\phi} = 0$ en tout temps. Les équations du mouvement s'écrivent donc sous une forme simplifiée :

$$\begin{cases} -2k\rho = m\ddot{\rho} \\ -2kz - mg = m\ddot{z} \end{cases} \tag{25}$$

Ces équations ont pour solution générale

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \cos(\omega t + \theta) \\ z = z_{eq} + (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega t + \theta') \end{cases} \tag{26}$$

avec $\omega = \sqrt{2k/m}$, et les constantes d'intégration $\rho_0, z_0, \theta, \theta'$.

On note le déplacement initial $D_\rho\hat{e}_\rho + D_z\hat{e}_z$. Les conditions initiales sont $\rho(0) = D_\rho$, $z(0) = z_{eq} + D_z$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$, on obtient donc

$$\begin{cases} \rho_0 = D_\rho \\ z_0 = z_{eq} + D_z \\ \theta = 0 \\ \theta' = 0. \end{cases} \tag{27}$$

donc

$$\begin{cases} \rho = D_\rho \cos(\omega t) \\ z = z_{eq} + D_z \cos(\omega t) \end{cases} \tag{28}$$

En coordonnées cartésiennes, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} -2kx = m\ddot{x} \\ -2ky = m\ddot{y} \\ -2kz - mg = m\ddot{z} \end{cases} \tag{29}$$

et la solution générale est :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta_x) \\ y(t) = y_0 \cos(\omega t + \theta_y) \\ z(t) = z_{eq} + (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega t + \theta_z) \end{cases} \tag{30}$$

avec $\omega = \sqrt{2k/m}$ et les constantes d'intégration $x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z$. On note le déplacement initial $D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z}$, on obtient donc pour les constantes d'intégration :

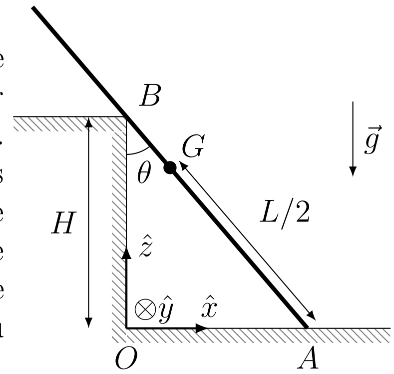
$$\begin{cases} x_0 = D_x \\ y_0 = D_y \\ z_0 = z_{eq} + D_z \\ \theta_x = 0 \\ \theta_y = 0 \\ \theta_z = 0. \end{cases} \tag{31}$$

donc

$$\begin{cases} x(t) = D_x \cos(\omega t) \\ y(t) = D_y \cos(\omega t) \\ z(t) = z_{eq} + D_z \cos(\omega t) \end{cases} \tag{32}$$

3 Tige appuyée contre un seuil (8 points)

Enoncé



Une tige fine de longueur L et de masse m a une extrémité posée sur un sol horizontal, et est appuyée contre un seuil de hauteur $H = L/2$. L'angle que la tige forme avec la verticale est noté θ. On étudie la situation statique, et on ne considère que les angles $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, de sorte que la tige soit toujours appuyée sur l'angle du seuil au point B, comme illustré sur le dessin. Le sol applique une force de frottement statique de coefficient μ_s sur le pied de la tige (au point A), mais il n'y a pas de force de frottement au point d'appui sur l'angle supérieur du seuil (au point B).

a) Donner la liste des forces qui s'appliquent sur la tige, et les représenter sur un dessin avec leurs points d'application. [2 pts]

b) Déterminer la condition sur le coefficient μ_s pour que l'équilibre statique soit réalisé, et l'exprimer en fonction de l'angle θ et des données du problème. [6 pts]

Corrigé

a) (2 points au total)

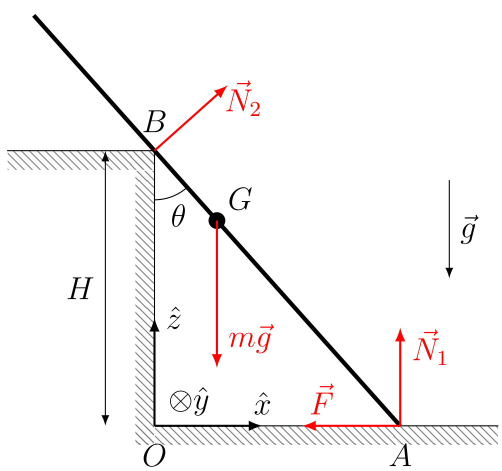
On prend un repère $Oxyz$ avec l'origine au pied du seuil, l'axe x horizontal, et l'axe z vertical. Les forces sont :

— le poids de la tige, $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$, s'appliquant au centre de masse G ;

— la force de frottement du sol qui s'applique à l'extrémité A de la tige, $\vec{F} = F_x\,\hat{x}$;

— la force du liaison du sol, $\vec{N}_1 = N_1\,\hat{z}$, qui s'applique verticalement à l'extrémité A de la tige ;

— la force de liaison du haut du seuil (point B), $\vec{N}_2 = N_2(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{z})$, qui s'applique perpendiculairement à la tige.



b) (6 points au total)

Les conditions pour que l'équilibre statique soit réalisé sont que la somme des forces (théorème du centre de masse) et la somme des moments des forces (théorème du moment cinétique) s'annulent.

Le théorème du centre de masse, projeté sur les axes du repère donne :

$$\begin{cases} F_x + N_2 \cos\theta = 0 \\ 0 = 0 \\ -mg + N_1 + N_2 \sin\theta = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Le théorème du moment cinétique peut être exprimé par rapport au pied de la tige A. La seule composante non nulle des moments des forces est selon $\hat{y}$, donc on écrit la projection selon cette composante :

$$-\frac{L}{2} mg \sin\theta + \frac{H}{\cos\theta} N_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad N_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{L}{H}\right)}_{=1 \text{ car } L=2H} mg \sin\theta \, \cos\theta \tag{34}$$

En combinant avec l'Eq. (33), on obtient

$$F_x = -\frac{1}{2}\frac{L}{H} mg \sin\theta \, \cos^2\theta \tag{35}$$

$$N_1 = mg - \frac{1}{2}\frac{L}{H} mg \sin^2\theta \, \cos\theta \tag{36}$$

La condition sur la force de frottement statique est $|F_x| \leq \mu_\mathrm{s} |N_1|$, d'où

$$\frac{1}{2}\frac{L}{H} mg \sin\theta \, \cos^2\theta \leq \mu_\mathrm{s}(mg - \frac{1}{2}\frac{L}{H} mg \sin^2\theta \, \cos\theta) \,, \tag{37}$$

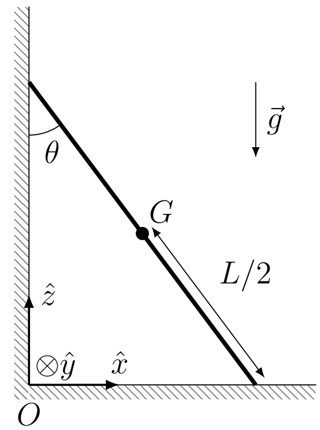
et la condition sur le coefficient μ_s est donc (avec $L = 2H$)

$$\mu_\mathrm{s} \geq \frac{\sin\theta \cos^2\theta}{\frac{2H}{L} - \sin^2\theta \cos\theta} = \frac{\sin\theta \cos^2\theta}{1 - \sin^2\theta \cos\theta} \tag{38}$$

4 Tige glissante (16 points)

Enoncé

Une tige fine de longueur L, de masse m a une extrémité posée sur un sol horizontal, et est appuyée contre un mur vertical. L'angle que la tige forme avec la verticale est noté θ. On lâche la tige avec une vitesse nulle à un angle initial $\theta = \frac{\pi}{3}$, et on étudie le mouvement de la tige dans sa chute. Dans ce problème, les forces de frottement sont négligeables.



a) Dans le repère indiqué, exprimer les composantes du vecteur position $\vec{r}_G$ du centre de masse de la tige en fonction de l'angle θ et de la longueur L. En déduire les vecteurs vitesse $\dot{\vec{r}}_G$ et accélération $\ddot{\vec{r}}_G$. [2 pts]

b) Ecrire les équations du mouvement. En déduire une équation différentielle pour l'angle θ qui ne dépende que des données du problème. [7 pts]

c) Trouver une intégrale première du mouvement et donner son expression. [4 pts]

d) Durant la chute de la tige, à partir de quel angle θ l'extrémité supérieure de la tige se décolle-t-elle du mur vertical ? [3 pts]

Corrigé

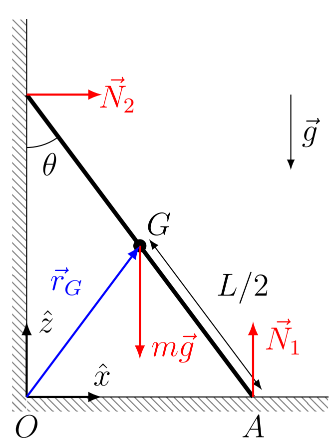
a) (2 points au total)

On prend un repère $Oxyz$ avec l'origine au pied du seuil, l'axe x horizontal, et l'axe z vertical. La position du centre de masse G, et de ses dérivées sont données par

$$\vec{r}_G = \frac{L}{2}(\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{z}) \tag{39}$$

$$\dot{\vec{r}}_G = \frac{L}{2}\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{z}) \tag{40}$$

$$\ddot{\vec{r}}_G = \frac{L}{2}\ddot{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{z}) - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2(\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{z})\,. \tag{41}$$



b) (7 points au total)

Les forces qui s'appliquent sur la tige sont

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{z} \tag{42}$$
$$\vec{N}_1 = N_1\,\hat{z} \tag{43}$$
$$\vec{N}_2 = N_2\,\hat{x}\,. \tag{44}$$

Le théorème du centre de masse ($m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = m\ddot{\vec{r}}_G$) s'écrit en projection en utilisant l'Eq. (41) et les expressions des forces :

$$N_2 = m\frac{L}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \tag{45}$$
$$0 = 0 \tag{46}$$
$$N_1 - mg = m\frac{L}{2}(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta)\,. \tag{47}$$

Dans son mouvement de chute, la tige tourne autour de l'axe $\hat{y}$, qui est parallèle à un axe principal d'inertie au centre de masse. La vitesse angulaire et sa dérivée s'écrivent

$$\vec{\omega} = \omega_y\,\hat{y} = -\dot{\theta}\,\hat{y} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{\omega}} = -\ddot{\theta}\,\hat{y} \tag{48}$$

Pour le théorème du moment cinétique, on peut utiliser le centre de masse G comme point de référence. Le moment des forces par rapport à G est

$$\vec{M}_G = (-\frac{L}{2}N_1\sin\theta + \frac{L}{2}N_2\cos\theta)\,\hat{y}\,, \tag{49}$$

et le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_G\dot{\vec{\omega}} = -I_G\ddot{\theta}\,\hat{y} = (-\frac{L}{2}N_1\sin\theta + \frac{L}{2}N_2\cos\theta)\,\hat{y}\,. \tag{50}$$

En utilisant les Equations (45) et (47) pour éliminer N_1 et N_2, on obtient

$$-I_g\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\left[-\sin\theta\left(mg + m\frac{L}{2}(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta)\right) + \cos\theta\left(m\frac{L}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\right)\right] \tag{51}$$
$$= -mg\frac{L}{2}\sin\theta + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\ddot{\theta}\,, \tag{52}$$

d'où l'équation différentielle pour θ

$$\underbrace{\left[I_G + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]}_{=\frac{1}{3}mL^2\equiv I}\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta\,. \tag{53}$$

Solutions alternatives : Pour le théorème du moment cinétique, on peut utiliser les point de contact de la tige avec le sol ou le seuil comme point de référence, mais il faut alors ajouter le terme dû au fait que ces points ne sont pas fixes dans le référentiel. On peut aussi utiliser l'origine du repère, O, comme point de référence, mais il y a une terme de plus dans la somme des moments de forces et il faut appliquer le théorème de Steiner.

c) (4 points au total)

Pour obtenir une intégrale première, on peut intégrer l'Eq. (53)

$$I\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta} \tag{54}$$

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = -mg\frac{L}{2}\cos\theta + C\,, \tag{55}$$

où C est une constante d'intégration, que l'on peut déterminer en connaissant les conditions initiales :

$$C = \frac{1}{2}I\underbrace{\dot{\theta}^2}_{=0} + mg\frac{L}{2}\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}mgL\,. \tag{56}$$

Finalement, l'intégrale première s'écrit :

$$\dot{\theta}^2 = -mgLI\cos\theta + \frac{mgL}{2I} = \frac{mgL}{I}(\frac{1}{2} - \cos\theta)\,. \tag{57}$$

Solution alternative : l'intégrale première peut aussi être déterminée à partir de l'énergie mécanique, qui est conservée car la seule force qui travaille, le poids, est conservative. L'énergie mécanique est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 + mgz_G\,, \tag{58}$$

De l'Eq. (40) on a que $v_G^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2$. On a aussi que $\omega^2 = \dot{\theta}^2$ et $z_G = \frac{L}{2}\cos\theta$, d'où

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta = E_0\,. \tag{59}$$

La constante E_0 est donnée par les conditions initiales ($\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ et $\dot{\theta} = 0$) :

$$E_0 = \frac{1}{2}mgL\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}mgL\,. \tag{60}$$

L'intégrale première s'écrit alors (cf. Eq. (57)), avec $I = I_g + \frac{1}{4}mL^2$,

$$\dot{\theta}^2 = -mgLI\cos\theta + \frac{mgL}{2I} = \frac{mgL}{I}(\frac{1}{2} - \cos\theta)\,. \tag{61}$$

d) (3 points au total)

La tige décolle de la paroi verticale dès que $N_2 = 0$. En substituant les expressions de $\ddot{\theta}$, Eq. (53), et de $\dot{\theta}$, Eq. (57), dans l'Eq. (45), on obtient

$$\begin{aligned} N_2 &= m\frac{L}{2}\left(\frac{mgL}{2I}\cos\theta - \frac{mgL}{I}(\frac{1}{2} - \cos\theta)\sin\theta\right) &(62)\\ &= \frac{m^2gL^2}{2I}\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\right) &(63)\\ &= \frac{m^2gL^2}{2I}\sin\theta\,(3\cos\theta - 1)\;. &(64)\end{aligned}$$

Avec la condition de décollement, $N_2 \leq 0$, on trouve que

$$3\cos\theta - 1 \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta \leq \frac{1}{3} \qquad \left(\Rightarrow \theta \geq \arccos\frac{1}{3} \approx 70^\circ\right)\,. \tag{65}$$