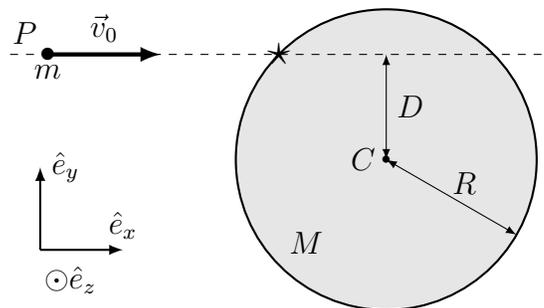

1 Collision dans l'espace (17 points)

Enoncé

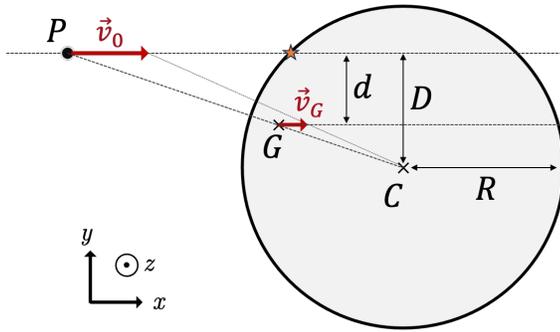
Un astéroïde de masse m , modélisé comme un point matériel P , entre en collision avec une planète sphérique homogène de rayon R , de masse M et de moment d'inertie $I_C = \frac{2}{5}MR^2$ par rapport à son centre de masse C . Initialement, la planète est immobile, c'est-à-dire que la vitesse angulaire et la vitesse du centre de masse C de la planète sont nulles, et l'astéroïde suit une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \hat{e}_x$ et telle que la distance d'approche minimale du point C est égale à D , comme indiqué sur le dessin.



Pour étudier la collision on néglige la force gravitationnelle et toute autre force externe. La collision est complètement inélastique (choc mou), et l'astéroïde reste collé à la surface de la planète au point d'impact. Exprimer les réponses dans le repère cartésien représenté sur le dessin.

- Lesquelles de ces quantités (la quantité de mouvement totale, l'énergie cinétique totale, et le moment cinétique total du système planète+astéroïde) sont conservées lors de la collision? Justifier.
- Déterminer la vitesse \vec{v}_G du centre de masse G du système planète+astéroïde.
- Calculer la distance entre le centre C de la planète et le centre de masse G du système planète+astéroïde après la collision, en fonction de la masse réduite $\mu = \frac{mM}{M+m}$.
- Donner l'expression du moment cinétique total du système planète+astéroïde par rapport au centre de masse G avant la collision.
- Calculer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du système planète+astéroïde après la collision. Donner la réponse dans le repère indiqué sur le dessin, et en fonction des données du problème.

Corrigé



- a) Puisque, par hypothèse, le système planète+astéroïde est isolé (aucune force externe), la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total sont conservés. Par contre, l'énergie cinétique n'est pas conservée car, dans le choc mou, les forces internes travaillent.
- b) La quantité de mouvement totale,

$$\vec{p}_{\text{tot}} = (m + M)\vec{v}_G = m\vec{v}_0, \quad (1)$$

est conservée, d'où $\vec{v}_G = \frac{m}{m+M}\vec{v}_0$ est la vitesse du centre de masse \$G\$, inchangée avant et après la collision.

- c) La position du centre de masse se trouve sur le segment \$CP\$, à la coordonnée

$$\vec{r}_G = \frac{M\vec{r}_C + m\vec{r}_P}{M + m}. \quad (2)$$

Par rapport au point \$C\$, la distance vaut

$$\overline{CG} = \frac{M \cdot 0 + mR}{M + m} = \frac{m}{M + m}R. \quad (3)$$

- d) Puisque le moment cinétique est conservé lors de la collision, il suffit de calculer le moment cinétique initial. Comme la planète est initialement immobile, elle ne contribue pas au moment cinétique initial, et donc

$$\vec{L}_G = \overrightarrow{GP} \wedge m\vec{v}_0 = -dmv_0 \hat{e}_z, \quad (4)$$

où nous avons introduit la distance \$d\$ entre \$G\$ et la trajectoire de \$P\$ avant l'impact. En utilisant le théorème de Thalès on voit que

$$\frac{D}{d} = \frac{PC}{PG} \implies d = D \frac{PG}{PC} = D \frac{M}{m + M} \quad (5)$$

En introduisant la masse réduite $\mu = \frac{mM}{m+M}$ on peut ainsi écrire le moment cinétique total avant le choc :

$$\vec{L}_G = -\mu D v_0 \hat{e}_z \quad (6)$$

- e) Après le choc, le solide constitué de la planète + l'astéroïde "collé" à la surface entre en rotation autour de l'axe \$\hat{e}_z\$ pour conserver le moment cinétique total. La vitesse angulaire du système est alors de la forme $\vec{\omega} = \omega_z \hat{e}_z$, car \$\hat{e}_z\$ est un axe principal d'inertie. Le

moment d'inertie $I_{G,z}$ du système autour d'un axe selon \hat{e}_z , par rapport à son centre de masse, vaut :

$$I_{G,z} = [I_C + M(\overline{CG})^2] + m(\overline{GP})^2, \quad (7)$$

$$= I_C + M\left(\frac{m}{M+m}R\right)^2 + m\left(R - \frac{m}{M+m}R\right)^2 \quad (8)$$

$$= I_C + \frac{mM}{M+m}R^2 = I_C + \mu R^2, \quad (9)$$

$$(10)$$

où le terme $I_C + M(\overline{CG})^2$ est le moment d'inertie de la planète par rapport à G (en utilisant le théorème de Steiner), et le terme $m(\overline{GP})^2$ est la contribution de l'astéroïde au moment d'inertie.

Le moment cinétique peut alors être écrit

$$\vec{L}_G = I_{G,z}\vec{\omega} = \left(I_C + \frac{mM}{M+m}R^2\right)\omega \hat{e}_z = (I_C + \mu R^2)\omega \hat{e}_z \quad (11)$$

Par conservation du moment cinétique dans la collision, on utilise le résultat de l'Eq. (6)

$$(I_C + \mu R^2)\omega \hat{e}_z = -\mu D v_0 \hat{e}_z \quad (12)$$

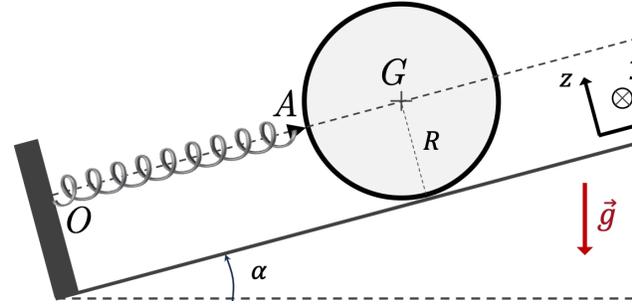
et donc finalement

$$\omega = \frac{-\mu D v_0}{I_C + \mu R^2} \quad (13)$$

2 Tir de flipper (23 points)

Enoncé

On étudie le mouvement d'une boule homogène de rayon R , de masse m et de centre de masse G . Son moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à \hat{e}_y passant par G est I_G . Cette boule roule sans glisser sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale, selon la direction définie par l'axe \hat{e}_x . Un ressort sans masse de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé à l'origine O du repère ; il reste en tout temps aligné avec \hat{e}_x et peut seulement pousser sur la boule au point de contact A , sans frottement en ce point. Aucune force n'empêche la boule de perdre le contact avec le ressort en A . La position de la boule est repérée par la coordonnée $x(t)$ de son centre de masse.



- Identifier toutes les forces s'exerçant sur la boule, indiquer leurs points d'application et les dessiner.
- L'énergie mécanique du système est-elle conservée ? Justifier.
- Etablir l'équation différentielle satisfaite par la coordonnée $x(t)$ tant que la boule est en contact avec le ressort.
- Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ de la boule et montrer qu'elle est stable. Quelle est la condition sur le produit kl_0 pour que $x_{\text{éq}} > R$?

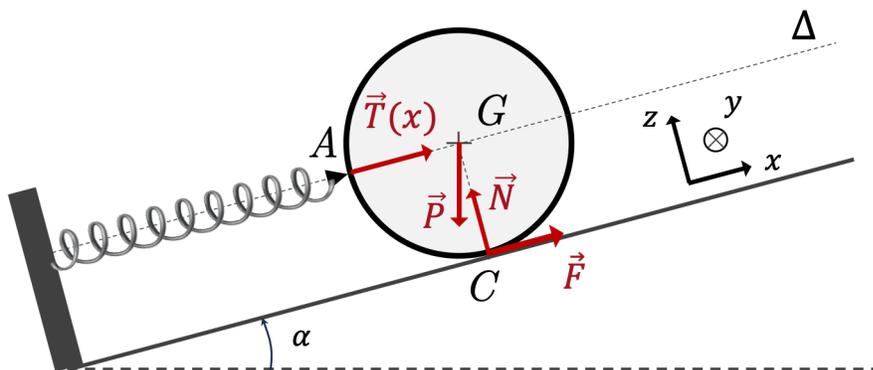
On considère maintenant la situation où, à l'instant initial t_0 , le ressort est totalement comprimé et la vitesse de la boule est nulle, c'est-à-dire que $x(t_0) = R$ et $\dot{x}(t_0) = 0$.

- Quelle est la condition sur le coefficient de frottement statique μ_S entre la boule et le sol pour qu'il n'y ait effectivement pas de glissement à l'instant t_0 ?
- Quelle est la condition sur kl_0 pour que la boule perde le contact avec le ressort (décollement) au cours de son mouvement ?
- Dans ce cas, déterminer la coordonnée maximale x_{max} atteinte par la boule dans son mouvement.

Corrigé

a) Forces externes :

- Force de pesanteur appliquée au centre de masse G
- Force de rappel du ressort appliquée au point A selon \hat{e}_x
- Force de réaction/liaison du support appliquée en C selon \hat{e}_z
- Force de frottement statique appliquée en C selon \hat{e}_x



b) Puisque \vec{F} et \vec{N} ne travaillent pas car C a une vitesse nulle et que \vec{P} et \vec{T} sont conservatives l'énergie mécanique $E = K + V$ est conservée

c) (i) Méthode 1 : énergie mécanique constante

Expression correcte de l'énergie potentielle du ressort $V_T(x) = \frac{1}{2}k(x - R - l_0)^2$ (+cst)

Expression correcte de l'énergie potentielle de pesanteur $V_P(x) = mg \sin \alpha x$ (+cst)

L'hypothèse de non glissement implique $R\omega = \dot{x}$

L'énergie cinétique peut se trouver de deux façons : (i) par rapport à G , elle est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse $\frac{1}{2}mv^2$ et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse $\frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_G}{R^2}v^2$ (car $\omega = v/R$) ; (ii) par rapport à C , il y a seulement une énergie cinétique de rotation, mais avec un moment d'inertie valant $I_G + mR^2$. Dans les deux cas on trouve :

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{I_G}{R^2} + m \right) \dot{x}^2$$

Puisque l'énergie mécanique est conservée, on a $dE/dt = 0$. En remplaçant $E = K + V_T + V_P$ puis en simplifiant le résultat par \dot{x} (pas de justification demandée) on obtient l'équation du mouvement

$$\left(\frac{I_G}{mR^2} + 1 \right) \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - R - l_0) + g \sin \alpha = 0 \quad (14)$$

(ii) Méthode 2 : théorème du moment cinétique par rapport au point de contact C

Moment de la force de rappel $\vec{CA} \wedge \vec{T} = -Rk(x - R - l_0)\hat{e}_y$

Moment du poids $\vec{CA} \wedge \vec{P} = (-mgR \sin \alpha)\hat{e}_y$

L'hypothèse de non glissement implique $R\omega = \dot{x}$

Huygens-Steiner (th. du transport) pour obtenir le moment cinétique par rapport à C :

$$\vec{L}_C = (I_G + mR^2)\vec{\omega} = (I_G/R + mR)\dot{x}\hat{e}_y \quad (15)$$

Théorème du moment cinétique par rapport à C :

$$\left(\frac{I_G}{mR^2} + 1\right)\ddot{x} = -g\sin\alpha - \frac{k}{m}(x - R - l_0) \quad (16)$$

(iii) Méthode 3 : théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G

Théorème du centre de masse projeté sur x :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x - R - l_0) + F_x \quad (17)$$

Moment des forces par rapport à G : $\overrightarrow{GC} \wedge \vec{F} = -R F_x \hat{e}_y$

L'hypothèse de non glissement implique $R\omega = \dot{x}$

Comme le moment cinétique par rapport à G vaut $\vec{L}_G = I_G\vec{\omega} = I_G/R\dot{x}\hat{e}_y$ le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{I_G}{R}\ddot{x} = -R F_x \quad (18)$$

En injectant (18) dans (17) on retrouve eq. (16)

d) (i) Méthode 1 : Avec l'énergie potentielle :

$$V(x) = mg\sin\alpha x + \frac{1}{2}k(x - R - l_0)^2 \quad (19)$$

$$\frac{dV}{dx} = mg\sin\alpha + k(x - R - l_0) \quad (20)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k > 0 \quad (21)$$

La position d'équilibre satisfait $\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_{\text{éq}} = l_0 + R - \frac{mg\sin\alpha}{k}$. Afin que $x_{\text{éq}} > R$ (c'est à dire pour la boule ne touche pas le support du ressort à l'équilibre) il faut donc que $kl_0 > mg\sin\alpha$.

C'est un équilibre stable car $\frac{d^2V}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0$.

(ii) Méthode 2 : Avec les équations du mouvement :

D'après eq. (14) ou (16) la condition d'équilibre $\ddot{x} = 0$ s'écrit :

$$-mg\sin\alpha = k(x_{\text{éq}} - R - l_0) \quad (22)$$

$$x_{\text{éq}} = l_0 + R - \frac{mg\sin\alpha}{k} \quad (23)$$

Afin que $x_{\text{éq}} > R$ il faut donc que $kl_0 > mg\sin\alpha$.

On pose ensuite $X \equiv x - x_{\text{éq}}$ qui mesure le déplacement par rapport à l'équilibre. En remarquant que $\ddot{X} = \ddot{x}$ l'équation (16) devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{(m + I_G/R^2)}} \quad (24)$$

qui est celle d'un oscillateur harmonique non-amorti de pulsation propre ω_0 ; l'équilibre est donc stable .

e) Théorème du centre de masse projeté sur z

$$m\ddot{z} = -mg \cos \alpha + N_z \quad (25)$$

Par hypothèse $\ddot{z} = 0$ donc $N_z = mg \cos \alpha$.

La condition de non glissement sur les normes s'écrit :

$$\left| \frac{F_x}{N_z} \right| \leq \mu_s \quad \text{en tout temps, avec} \quad |N_z| = mg \cos \alpha \quad (26)$$

On peut réutiliser l'équation (18) pour trouver

$$F_x = -\frac{I_G}{R^2} \ddot{x} \quad (27)$$

$$= \frac{I_G}{I_G + mR^2} [mg \sin \alpha + k(x - R - l_0)] \quad (28)$$

Ce qui donne en $x = R$, tenant compte de $kl_0 > mg \sin \alpha$:

$$|F_x(x = R)| = \frac{I_G}{I_G + mR^2} [kl_0 - mg \sin \alpha] \quad (29)$$

On obtient donc comme condition sur μ_s

$$\mu_s \geq \frac{I_G}{I_G + mR^2} \left[\frac{kl_0}{mg \cos \alpha} - \tan \alpha \right] \quad (30)$$

f) La boule perd le contact en A lorsque $T_x(x)$ s'annule, ce qui a lieu lorsque $x(t) \geq l_0 + R$.

(i) Méthode 1 : Avec l'énergie mécanique

Par conservation de l'énergie mécanique, et comme il y a un seul minimum de potentiel, la boule qui commence à vitesse nulle en $x = R$ atteindra $x(t) \geq l_0 + R$ si et seulement si $V(R) \geq V(l_0 + R)$, ce qui donne d'après l'expression (19) de $V(x)$

$$gmR \sin \alpha + \frac{1}{2}kl_0^2 \geq +mg \sin \alpha (R + l_0) \sin \alpha \quad (31)$$

$$\frac{1}{2}kl_0^2 \geq mg \sin \alpha l_0 \quad (32)$$

$$kl_0 \geq 2mg \sin \alpha \quad (33)$$

(ii) Méthode 2 : Avec les équations du mouvement

La solution générale de l'éq. (24) peut s'écrire comme $X(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, et en prenant compte des conditions initiales de l'énoncé on trouve $A_0 = -X_0 = -R + x_{\text{éq}} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$ et $\varphi_0 = \pi$. On peut donc finalement écrire $X(t) = \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} - l_0\right) \cos(\omega_0 t)$.

La boule perd le contact en A lorsque $X(t) \geq l_0 + R - x_{\text{éq}} = \frac{mg \sin \alpha}{k}$. Il faut donc que l'amplitude soit suffisamment grande :

$$A_0 \geq \frac{mg \sin \alpha}{k} \quad (34)$$

$$-\frac{mg \sin \alpha}{k} + l_0 \geq \frac{mg \sin \alpha}{k} \quad (35)$$

$$kl_0 \geq 2mg \sin \alpha \quad (36)$$

g) (i) Méthode 1 : Avec l'énergie mécanique :

L'énergie mécanique vaut à l'instant $t = 0$: $E = V(R) = mg \sin \alpha R + \frac{1}{2}kl_0^2$. Lorsque la boule atteint son altitude maximum en $x_{\text{max}} \geq l_0 + R$ l'énergie cinétique s'annule de nouveau et l'énergie mécanique vaut $E = V(x_{\text{max}}) = mg \sin \alpha x_{\text{max}}$. On a ainsi l'égalité :

$$V(R) = V(x_{\text{max}}) \quad (37)$$

$$mg \sin \alpha R + \frac{1}{2}kl_0^2 = mg \sin \alpha x_{\text{max}} \quad (38)$$

$$x_{\text{max}} - R = \frac{kl_0^2}{2mg \sin \alpha} \quad (39)$$

$$x_{\text{max}} = R + \frac{kl_0^2}{2mg \sin \alpha} \quad (40)$$

On peut vérifier que la condition $kl_0 \geq 2mg \sin \alpha$ implique bien que $x_{\text{max}} \geq R + l_0$.

(ii) Méthode 2 : Avec les équations du mouvement :

Pour simplifier la notation on pose $I_G = \lambda m R^2$ (avec $\lambda = \frac{2}{5}$ pour boule homogène).

Dans un premier temps, on étudie le mouvement entre $x = R$ et $x = R + l_0$ selon l'équation horaire $x(t) = l_0 + R - \frac{mg \sin \alpha}{k} - A_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $A_0 = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$. On note t_0 l'instant où la boule arrive au point $x = R + l_0$:

$$x(t_0) = l_0 + R = l_0 + R - \frac{mg \sin \alpha}{k} - A_0 \cos(\omega_0 t_0) \quad (41)$$

$$-A_0 \cos(\omega_0 t_0) = \frac{mg \sin \alpha}{k} \quad (42)$$

$$\cos(\omega_0 t_0) = -\frac{mg \sin \alpha}{k A_0} \quad (43)$$

En t_0 la vitesse vaut $v_0 = \omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t_0)$ et son carré peut s'écrire :

$$v_0^2 = \omega_0^2 A_0^2 (1 - \cos^2(\omega_0 t_0)) \quad (44)$$

$$= \omega_0^2 A_0^2 \left(1 - \frac{(mg \sin \alpha)^2}{k^2 A_0^2}\right) \quad (45)$$

$$= \omega_0^2 A_0^2 - \omega_0^2 \frac{(mg \sin \alpha)^2}{k^2} \quad (46)$$

Ensuite pour $t \geq t_0$, on étudie la "chute libre" gouvernée par $\ddot{x} = -\frac{g \sin \alpha}{1+\lambda}$, qui s'intègre

$$v(t) = -\frac{g \sin \alpha}{1+\lambda} t + v_0 \quad (47)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{g \sin \alpha}{1+\lambda} t^2 + v_0 t + l_0 + R \quad (48)$$

L'abscisse maximale est atteinte en t_1 satisfaisant $v(t_1) = 0$, qui donne

$$t_1 = v_0 \frac{1+\lambda}{g \sin \alpha}$$

et ainsi

$$x_{\max} = x(t_1) = -\frac{1}{2} \frac{g \sin \alpha}{1+\lambda} v_0^2 \frac{(1+\lambda)^2}{g^2 \sin^2 \alpha} + v_0^2 \frac{1+\lambda}{g \sin \alpha} + l_0 + R \quad (49)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+\lambda}{g \sin \alpha} v_0^2 + l_0 + R \quad (50)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+\lambda}{g \sin \alpha} \omega_0^2 \left[A_0^2 - \frac{(mg \sin \alpha)^2}{k^2} \right] + l_0 + R \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k}{mg \sin \alpha} \left[\left(l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} \right)^2 - \frac{(mg \sin \alpha)^2}{k^2} \right] + l_0 + R \quad (52)$$

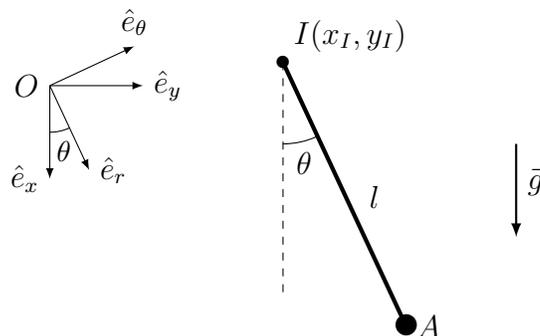
$$= \frac{1}{2} \frac{k}{mg \sin \alpha} \left[l_0^2 - 2l_0 \frac{mg \sin \alpha}{k} \right] + l_0 + R \quad (53)$$

$$x_{\max} = R + \frac{k l_0^2}{2mg \sin \alpha} \quad (54)$$

3 Pendule excité (20 points)

Enoncé

On s'intéresse au mouvement d'un pendule constitué d'une barre rigide de longueur l et de masse négligeable et d'un point matériel A de masse m attaché à l'une de ses extrémités. On admettra que la force exercée par la barre sur le point matériel est toujours dirigée le long de la barre. L'autre extrémité du pendule, désignée par I , n'est pas supposée fixe. On étudie le mouvement dans le plan vertical (xy) , et on désigne par θ l'angle du pendule avec la verticale.



- Pour les questions a) à e) on suppose que le point I est soumis à un mouvement horizontal décrit par : $x_I(t) = 0$ et $y_I(t)$ non constant.

On se propose, dans un premier temps, de travailler dans le référentiel du laboratoire.

- Exprimer l'accélération du point A en fonction de $y_I(t)$ et $\theta(t)$.
- Etablir l'équation différentielle satisfaite par la variable θ .

On se propose, dans un deuxième temps, de travailler dans le référentiel accéléré lié au point I .

- Etablir l'équation différentielle pour la variable θ en utilisant le théorème du moment cinétique. Comparer le résultat à celui de la question b).

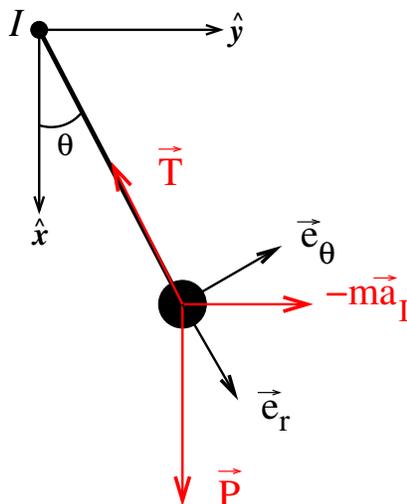
On s'intéresse maintenant au cas spécifique où le point I est soumis à une excitation sinusoïdale $y_I(t) = Y \sin(\Omega t)$, avec $Y > 0$ et $\Omega > 0$.

- Y a-t-il des positions d'équilibre (θ constant) ?
- Déterminer la forme que prend l'équation du mouvement dans la limite des petits angles. De quel type de problème s'agit-il ? Pour quelle valeur de Ω l'amplitude est-elle maximale ?

- On suppose désormais, pour les questions f) et g), que le point I oscille verticalement : $x_I(t) = X \sin(\Omega t)$ et $y_I(t) = 0$.

- Etablir l'équation différentielle satisfaite par la variable θ .
- Y a-t-il des positions d'équilibre (θ constant) ?

Corrigé



- a) L'accélération \vec{a}_A du point matériel peut se calculer en remarquant que le système tige + point matériel est un solide. Les vitesses des points A et I sont reliées par :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IA}$$

où la vitesse du point I est donnée par $\vec{v}_I = \dot{y}_I \vec{e}_y$ et le vecteur rotation du solide par $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, d'où

$$\vec{v}_A = \dot{y}_I \vec{e}_y + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge l \vec{e}_r = \dot{y}_I \vec{e}_y + l \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

L'accélération est donc donnée par :

$$\vec{a}_A = \ddot{y}_I \vec{e}_y + l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + l \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \ddot{y}_I \vec{e}_y + l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + l \dot{\theta} \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = \ddot{y}_I \vec{e}_y + l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

Alternativement, on peut commencer par exprimer les coordonnées cartésiennes de A en fonction de celles de I et de l'angle θ :

$$x_A = l \cos \theta, \quad y_A = y_I + l \sin \theta$$

d'où

$$\dot{x}_A = -l \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_I + l \dot{\theta} \cos \theta$$

et finalement

$$\ddot{x}_A = -l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta, \quad \ddot{y}_A = \ddot{y}_I + l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

- b) Dans le référentiel du laboratoire, le point matériel A est soumis à deux forces :

1. Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$.
2. La traction de la tige $\vec{T} = -T\vec{e}_r = -T \cos \theta \vec{e}_x - T \sin \theta \vec{e}_y$.

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a}_A = \vec{P} + \vec{T}$$

On peut se débarrasser de la traction de la tige dans la deuxième loi de Newton en la projetant sur \hat{e}_θ :

$$m\vec{a}_A \cdot \hat{e}_\theta = \vec{P} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{T} \cdot \hat{e}_\theta \quad (55)$$

$$m\ddot{y}_I \hat{e}_y \cdot \hat{e}_\theta + ml\ddot{\theta} = mg\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\theta \quad (56)$$

$$m\ddot{y}_I \cos \theta + ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (57)$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{y}_I \cos \theta + g \sin \theta = 0. \quad (58)$$

Alternativement, on peut projeter sur \hat{e}_x et \hat{e}_y :

$$m\ddot{x}_A = mg - T \cos \theta, \quad m\ddot{y}_A = -T \sin \theta.$$

On élimine T en faisant la différence de la première équation multipliée par $\sin \theta$ et de la deuxième multipliée par $\cos \theta$:

$$m\ddot{x}_A \sin \theta - m\ddot{y}_A \cos \theta = mg \sin \theta$$

d'où

$$m(-l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta - m(\ddot{y}_I + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta = mg \sin \theta.$$

soit, après simplification par m ,

$$-l\ddot{\theta} \sin^2 \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{y}_I \cos \theta - l\ddot{\theta} \cos^2 \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta.$$

d'où

$$-l\ddot{\theta} - \ddot{y}_I \cos \theta = g \sin \theta.$$

c) Dans le référentiel accéléré, le point matériel A est soumis à 3 forces :

1. Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$.
2. La traction de la tige $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.
3. La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_I$, où $\vec{a}_I = \ddot{y}_I\vec{e}_y$ est l'accélération du point I .

Comme le point I est au repos dans le référentiel accéléré, on peut utiliser le théorème du moment cinétique en ce point sous la forme simple :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \vec{M}_I^{\text{ext}}$$

où \vec{M}_I^{ext} est le moment au point I de toutes les forces appliquées au point matériel A . Calculons les deux membres de cette équation.

Par définition du moment cinétique,

$$\vec{L}_I = \vec{IA} \wedge m\vec{v}_A$$

Or, dans le référentiel accéléré, $\vec{v}_I = \vec{0}$, et $\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IA} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, ce qui conduit à

$$\vec{L}_I = l\hat{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\hat{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\hat{e}_z$$

et donc à

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\hat{e}_z.$$

Par ailleurs, le moment des forces est donné par

$$\vec{M}_I^{\text{ext}} = \vec{I}\vec{A} \wedge (\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ie}}) = l\hat{e}_r \wedge (mg\hat{e}_x - T\hat{e}_r - m\ddot{y}\hat{e}_y).$$

Comme $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_x = -\sin\theta\hat{e}_z$ et $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_y = \cos\theta\hat{e}_z$, il vient :

$$\vec{M}_I^{\text{ext}} = (-mgl\sin\theta - ml\ddot{y}\cos\theta)\hat{e}_z.$$

Le théorème du moment cinétique en I conduit donc à l'équation :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - ml\ddot{y}\cos\theta$$

ou encore

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \ddot{y}\cos\theta.$$

On retrouve bien la même équation qu'à la question b).

- d) Comme $y(t) = Y\sin(\Omega t)$, $\dot{y} = Y\Omega\cos(\Omega t)$ et $\ddot{y} = -Y\Omega^2\sin(\Omega t)$, l'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{Y}{l}\Omega^2\sin(\Omega t)\cos\theta.$$

Pour qu'il y ait une position d'équilibre, il faudrait que $(g/l)\sin\theta = (Y/l)\Omega^2\sin(\Omega t)\cos\theta$ quel que soit t , ce qui est impossible puisque Ω est supposé non nul. Il n'y a donc pas de position d'équilibre.

- e) Dans la limite des petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$, et l'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{Y}{l}\Omega^2\sin(\Omega t).$$

Il s'agit donc d'un oscillateur harmonique forcé non amorti. En l'absence de l'excitation forcée, la fréquence de cet oscillateur harmonique est donnée par $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. On s'attend à un phénomène de résonance, donc à une amplitude maximale, lorsque $\Omega \simeq \omega_0$.

- f) La seule différence, c'est que l'accélération \vec{a}_I est désormais donnée par $\vec{a}_I = \ddot{x}_I\hat{e}_x$. Dans la deuxième loi de Newton projetée sur \hat{e}_θ , le terme $m\ddot{y}_I\hat{e}_y \cdot \hat{e}_\theta$ est remplacé par $m\ddot{x}_I\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\theta = -m\ddot{x}_I\sin\theta$, ce qui conduit à l'équation :

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x}_I\sin\theta + g\sin\theta = 0.$$

Alternativement, on peut remplacer les coordonnées cartésiennes de l'accélération par

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_I - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta, \quad \ddot{y}_A = l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

ce qui conduit, en projetant la deuxième loi de Newton sur \hat{e}_x et \hat{e}_y , et après élimination de T , à la même équation.

On peut aussi refaire le calcul dans le référentiel accéléré, en remplaçant la force d'inertie d'entraînement par $-m\ddot{x}_I\hat{e}_x$, ce qui conduit à

$$\vec{M}_I^{\text{ext}} = (-mgl\sin\theta + ml\ddot{x}_I\sin\theta)\hat{e}_z,$$

et donc à l'équation

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \ddot{x}_I\sin\theta.$$

g) Finalement, l'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{X}{l} \Omega^2 \sin(\Omega t) \right) \sin \theta = 0.$$

Comme pour le pendule avec point d'attache fixe, il y a deux positions d'équilibre, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Remarque : Kapitza a démontré que si la fréquence Ω était suffisamment grande, la position d'équilibre $\theta = \pi$ pouvait être stable.