Ne pas ouvrir ce feuillet avant le signal de début d'examen ... mais lire attentivement cette page de couverture

SEUL LE CAHIER DE REPONSES SERA CORRIGE

Avant le début de l'examen

- Verifier les informations présentes sur le cahier de réponses
- Signer la page de garde du cahier de réponse
- Poser votre carte d'étudiant EPFL sur la table devant vous.
- Ne laisser sur votre table que le matériel autorisé, à savoir:
  - carte "Résolution d'un problème de mécanique" reçue au cours;
  - formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto-verso (= 2 pages);
  - stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon, papier brouillon;
  - boisson + ravitaillement léger.
- Attendre le signal pour ouvrir ce feuillet et débuter l'examen

Pendant l'examen

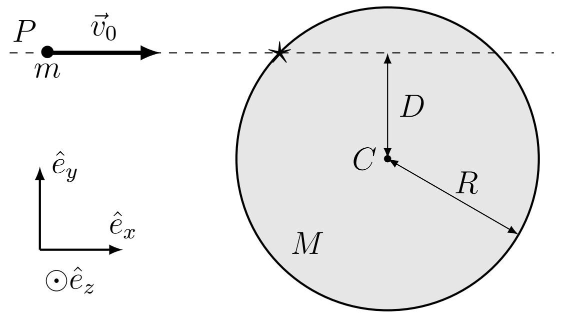
- Pour chacun des problèmes:
  - **Répondez aux questions de chaque exercice dans la partie correspondante du cahier, en justifiant vos réponses.**
  - Ecrivez lisiblement le développement menant à la solution.
  - Ne dégrafez pas les pages du cahier.
  - encadrez la réponse finale à chaque question posée dans l'énoncé;
  - La place étant limitée, utilisez d'abord les feuilles de brouillon avant de reporter vos réponses au propre.
- Ne pas écrire les solutions de deux problèmes différents dans la même section du cahier.
- Le papier brouillon vierge est autorisé; les brouillons ne seront pas corrigés.
- Ne pas laisser vos brouillons ou vos solutions à côté de vous.
- Ne pas quitter la salle sans autorisation.

A la fin de l'examen (après 3h30 ou quand vous avez terminé)

- Restez assis à votre place en silence et attendez l'arrivée d'un surveillant.
- Rendre le cahier de réponses **signé** et le feuillet d'énoncé en mains propres à un surveillant qui s'occupera des formalités finales.

1 Collision dans l'espace (17 points)

Un astéroïde de masse m, modélisé comme un point matériel P, entre en collision avec une planète sphérique homogène de rayon R, de masse M et de moment d'inertie $I_C = \frac{2}{5}MR^2$ par rapport à son centre de masse C. Initialement, la planète est immobile, c'est-à-dire que la vitesse angulaire et la vitesse du centre de masse C de la planète sont nulles, et l'astéroïde suit une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{e}_x$ et telle que la distance d'approche minimale du point C est égale à D, comme indiqué sur le dessin.



Pour étudier la collision on néglige la force gravitationnelle et toute autre force externe. La collision est complètement inélastique (choc mou), et l'astéroïde reste collé à la surface de la planète au point d'impact. Exprimer les réponses dans le repère cartésien représenté sur le dessin.

a) Lesquelles de ces quantités (la quantité de mouvement totale, l'énergie cinétique totale, et le moment cinétique total du système planète+astéroïde) sont conservées lors de la collision? Justifier.

b) Déterminer la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse G du système planète+astéroïde.

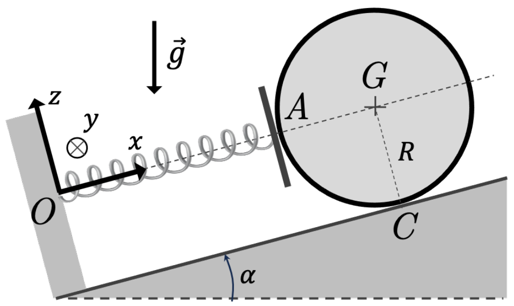
c) Calculer la distance entre le centre C de la planète et le centre de masse G du système planète+astéroïde après la collision, en fonction de la masse réduite $\mu = \frac{mM}{M+m}$.

d) Donner l'expression du moment cinétique total du système planète+astéroïde par rapport au centre de masse G avant la collision.

e) Calculer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du système planète+astéroïde après la collision. Donner la réponse dans le repère indiqué sur le dessin, et en fonction des données du problème.

2 Tir de flipper (23 points)

On étudie le mouvement d'une boule homogène de rayon R, de masse m et de centre de masse G. Son moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à $\hat{e}_y$ passant par G est I_G. Cette boule roule sans glisser sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale, selon la direction définie par l'axe $\hat{e}_x$. Un ressort sans masse de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé à l'origine O du repère; il reste en tout temps aligné avec $\hat{e}_x$ et peut seulement pousser sur la boule au point de contact A, sans frottement en ce point. Aucune force n'empêche la boule de perdre le contact avec le ressort en A. La position de la boule est repérée par la coordonnée $x(t)$ de son centre de masse.



a) Identifier toutes les forces s'exerçant sur la boule, indiquer leurs points d'application et les dessiner.

b) L'énergie mécanique du système est-elle conservée? Justifier.

c) Etablir l'équation différentielle satisfaite par la coordonnée $x(t)$ tant que la boule est en contact avec le ressort.

d) Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ de la boule et montrer qu'elle est stable. Quelle est la condition sur le produit kl_0 pour que $x_{\text{éq}} > R$?

On considère maintenant la situation où, à l'instant initial t_0, le ressort est totalement comprimé et la vitesse de la boule est nulle, c'est-à-dire que $x(t_0) = R$ et $\dot{x}(t_0) = 0$.

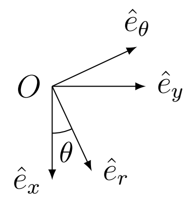
e) Quelle est la condition sur le coefficient de frottement statique μ_S entre la boule et le sol pour qu'il n'y ait effectivement pas de glissement à l'instant t_0?

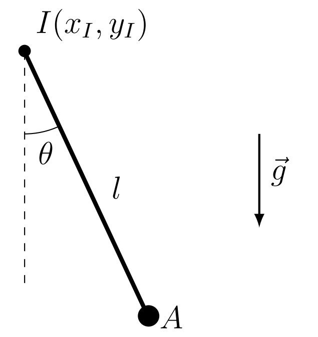
f) Quelle est la condition sur kl_0 pour que la boule perde le contact avec le ressort (décollement) au cours de son mouvement?

g) Dans ce cas, déterminer la coordonnée maximale $x_{\max}$ atteinte par la boule dans son mouvement.

3 Pendule excité (20 points)

On s'intéresse au mouvement d'un pendule constitué d'une barre rigide de longueur l et de masse négligeable et d'un point matériel A de masse m attaché à l'une de ses extrémités. On admettra que la force exercée par la barre sur le point matériel est toujours dirigée le long de la barre. L'autre extrémité du pendule, désignée par I, n'est pas supposée fixe. On étudie le mouvement dans le plan vertical (xy), et on désigne par θ l'angle du pendule avec la verticale.





• Pour les questions a) à e) on suppose que le point I est soumis à un mouvement horizontal décrit par: $x_I(t) = 0$ et $y_I(t)$ non constant.

On se propose, dans un premier temps, de travailler dans le référentiel du laboratoire.

a) Exprimer l'accélération du point A en fonction de $y_I(t)$ et $\theta(t)$.

b) Etablir l'équation différentielle satisfaite par la variable θ.

On se propose, dans un deuxième temps, de travailler dans le référentiel accéléré lié au point I.

c) Etablir l'équation différentielle pour la variable θ en utilisant le théorème du moment cinétique. Comparer le résultat à celui de la question b).

On s'intéresse maintenant au cas spécifique où le point I est soumis à une excitation sinusoïdale $y_I(t) = Y\sin(\Omega t)$, avec $Y > 0$ et $\Omega > 0$.

d) Y a-t-il des positions d'équilibre (θ constant)?

e) Déterminer la forme que prend l'équation du mouvement dans la limite des petits angles. De quel type de problème s'agit-il? Pour quelle valeur de Ω l'amplitude est-elle maximale?

• On suppose désormais, pour les questions f) et g), que le point I oscille verticalement: $x_I(t) = X\sin(\Omega t)$ et $y_I(t) = 0$.

f) Etablir l'équation différentielle satisfaite par la variable θ.

g) Y a-t-il des positions d'équilibre (θ constant)?