

**Ne pas ouvrir ce feuillet avant le signal de début d'examen
... mais lire attentivement cette page de couverture**

Nom et prénom(s)

Numéro Sciper

Section et semestre

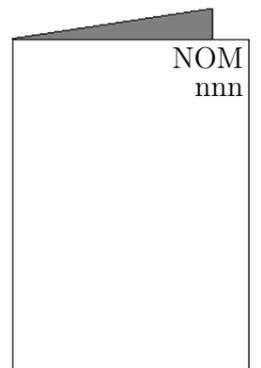
Salle / place /

Avant le début de l'examen

- Poser votre carte d'étudiant EPFL sur la table devant vous.
- Ne laisser sur votre table que le matériel autorisé, à savoir:
 - carte "Résolution d'un problème de mécanique" reçue au cours;
 - formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto-verso (= 2 pages);
 - stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon, papier vierge (pour brouillons);
 - boisson + ravitaillement léger.
- Attendre le signal pour ouvrir ce feuillet et débiter l'examen; l'intérieur de ce feuillet contient les énoncés de 4 problèmes ainsi que 5 feuilles A3 quadrillées vierges pliées en deux.

Pendant l'examen

- Pour chacun des problèmes:
 - utiliser une nouvelle feuille A3 quadrillée vierge;
 - écrire, en caractères d'imprimerie, votre nom en haut à droite sur la première page (lorsque la feuille est fermée), ainsi que le numéro "nnn", comme indiqué sur la figure ci-contre;
 - écrire lisiblement le développement menant à la solution;
 - si la solution nécessite plus d'une feuille A3 recto-verso, utiliser les feuilles supplémentaires en y notant aussi votre nom et numéro (si nécessaire des feuilles supplémentaires vous seront fournies).
- Ne pas écrire les solutions de deux problèmes différents sur la même feuille.
- Le papier brouillon vierge (non fourni) est autorisé; les brouillons ne seront pas corrigés.
- Ne pas laisser vos brouillons ou vos solutions à côté de vous.
- Ne pas quitter la salle sans autorisation.



A la fin de l'examen (après 3h30 ou quand vous avez terminé)

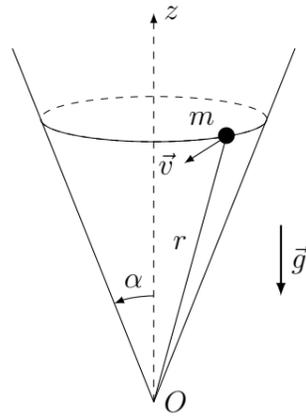
- Ecrire dans les cases ci-contre votre heure de fin d'examen et le nombre de feuilles de solution rendues (ne pas compter les feuilles restées vierges).
- Rendre ce feuillet d'énoncé contenant toutes vos feuilles de solution en mains propres à un surveillant de la salle, qui vous fera signer un registre indiquant le nombre de feuilles de solution rendues.

Heure de
fin d'examen

Nombre de
feuilles rendues

1 Point sur un cône (12 points)

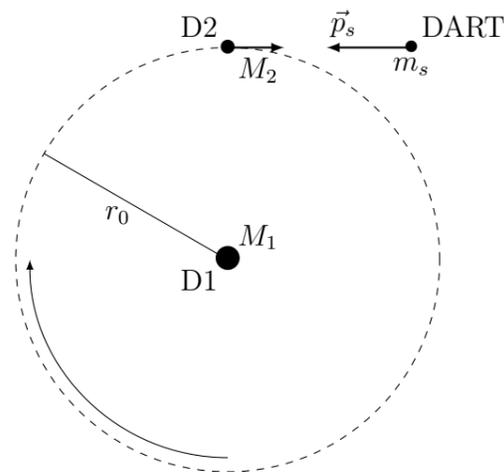
Un point matériel de masse m , soumis à la pesanteur, est contraint à se déplacer sans frottement sur un cône de révolution de sommet O s'ouvrant vers le haut avec un demi-angle d'ouverture α ($0 < \alpha < \pi/2$, $z > 0$), comme indiqué sur le dessin. On notera Oz l'axe de symétrie du cône.



- Choisir un système de coordonnées et exprimer la contrainte géométrique de contact entre le point matériel et le cône dans ces coordonnées. Représenter sur un dessin le repère associé à ces coordonnées.
- Ecrire les équations du mouvement, et les projeter sur les axes du repère.
- Donner l'expression du moment cinétique \vec{L}_O du point matériel par rapport à O . Montrer que sa composante verticale, L_z , est égale à $mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha$, puis que L_z est une constante du mouvement.
- Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E en fonction de L_z , de la distance r du point matériel au point O , et des données du problème. L'énergie mécanique E du point matériel est-elle une constante du mouvement? Justifier votre réponse.

2 Mission DART (14 points)

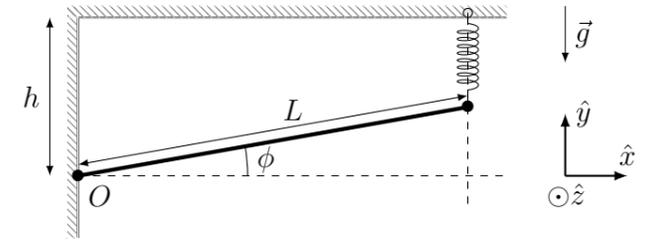
En septembre 2022, la mission DART de la NASA a testé la possibilité de dévier la trajectoire d'un astéroïde par l'impact d'un projectile. Le système choisi pour ce test consiste en un astéroïde principal D1, de masse M_1 , autour duquel orbite un plus petit objet D2, de masse M_2 très petite par rapport à M_1 . On peut donc travailler dans un référentiel \mathcal{R} , supposé d'inertie, dans lequel D1 est au repos. Les deux astéroïdes sont considérés comme des points matériels, et seule la force gravitationnelle entre D1 et D2 est prise en compte.



- L'orbite initiale de D2 autour de D1 est circulaire, de rayon r_0 et de période T_0 . Déterminer la masse M_1 en fonction de ces données, ainsi que de la constante G de gravitation universelle. *Indication: on pourra écrire les équations du mouvement pour D2.*
- La sonde DART, de masse m_s (négligeable par rapport à M_2 et M_1), doit entrer en collision avec D2. Juste avant la collision, la sonde a une quantité de mouvement \vec{p}_s , tangente à l'orbite de D2, et de sens opposé au vecteur vitesse de D2 comme indiqué sur le dessin. Le choc est frontal et parfaitement mou. Après le choc, l'astéroïde D2 a une nouvelle orbite, elliptique, autour de D1.
- Calculer V_2 , la vitesse de D2 juste après le choc.
 - Quelles sont les quantités conservées dans l'orbite de D2? Justifier votre réponse. Exprimer l'égalité de ces quantités à l'apogée (point le plus éloigné de D1) et au périégée (point le plus proche de D1) de l'orbite elliptique.
 - Calculer la nouvelle période orbitale T de D2, en fonction de T_0 , r_0 , V_2 , M_1 , et G . *Indication: commencer par calculer le grand axe de l'orbite à l'aide des résultats de la question c).*

3 Microscope à force atomique (15 points)

Un microscope à force atomique est constitué d'une tige rigide de masse M , de longueur L et de diamètre négligeable. La tige est attachée à un support immobile à l'une de ses extrémités (O) formant un angle ϕ avec l'horizontale. L'autre extrémité est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. On restreint l'étude à $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.

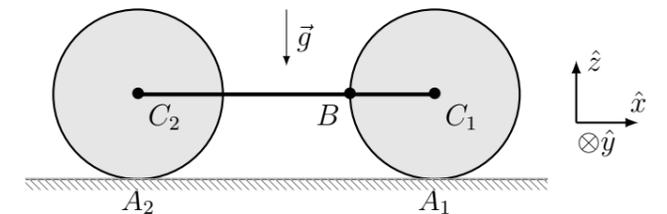


Le ressort est attaché au support à une hauteur h au dessus du point O , de manière à rester vertical à tout instant, et le mouvement s'effectue dans le plan vertical contenant le ressort et la tige. *Indication: le moment d'inertie de la tige par rapport à son centre de masse est $I_G = \frac{ML^2}{12}$.*

- Enumérer les forces appliquées sur la tige avec leur point d'application et les représenter sur un dessin. Donner leurs expressions en fonction de ϕ et des données du problème.
- On considère la situation d'équilibre statique. Calculer l'angle ϕ_e qui réalise l'équilibre statique. Donner une condition reliant k et les données du problème pour que $\phi_e = 0$.
- On considère maintenant le mouvement de la tige autour de la position d'équilibre $\phi_e = 0$. Donner une équation différentielle pour ϕ . Dans cette équation différentielle, utiliser l'approximation des petits angles ($\phi \simeq 0 \implies \sin \phi \simeq \phi$ et $\cos \phi \simeq 1$) et en déduire la période des oscillations autour de la position d'équilibre.

4 Freinage à vélo (18 points)

Un vélo circule en ligne droite sur une route horizontale. On modélise les roues du vélo par des anneaux minces identiques, de masse m et de rayon R . Le moment d'inertie de chacune des roues par rapport à son axe est mR^2 . Une tige rigide, sans masse et de longueur $L > 2R$ relie les centres C_1 et C_2 des deux roues, comme indiqué sur le dessin.



On considère d'abord que les deux roues reposent sur le sol et roulent sans glisser sur celui-ci. *Les questions c) et d) peuvent être résolues indépendamment de la question b).*

- Enumérer les forces externes appliquées sur le système {tige + deux roues}, et les représenter sur un dessin avec leurs points d'application. Donner leurs expressions dans le repère indiqué sur le dessin.
- Dans une première situation, on freine avec la roue avant: la tige et la roue avant sont alors en contact au point B , de sorte que la tige exerce sur la roue une force constante $\vec{F}_B = -F_B \hat{z}$, avec $F_B > 0$. Le freinage produit une accélération pour le vélo $\vec{a}_0 = -a_0 \hat{x}$.
- Exprimer la force de frottement entre la roue avant et le sol en fonction de a_0 et F_B , et des données du problème. *Indication: On pourra écrire les équations du mouvement pour la roue avant.*
- Dans une autre situation, on freine pour bloquer les deux roues, qui sont maintenant reliées rigidement à la tige, formant un unique solide indéformable. Les roues glissent sur le sol, avec un coefficient de frottement cinétique identique pour les deux roues, noté μ_c . Ce freinage produit une accélération $\vec{a}_1 = -a_1 \hat{x}$.
- Exprimer a_1 en fonction de μ_c et des données du problème.
 - Donner une condition sur a_1 pour que la roue arrière décolle du sol sous l'effet du freinage.

Rappel: Ecrire, en caractères d'imprimerie, votre nom en haut à droite sur la première page de chacune des feuilles de solution ainsi que le numéro "nnn"