

**Ne pas ouvrir ce feuillet avant le signal de début d'examen
... mais lire attentivement cette page de couverture**

Nom et prénom(s)

Numéro Sciper

Section et semestre

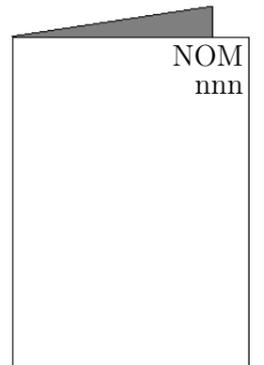
Salle / place /

Avant le début de l'examen

- Poser votre carte d'étudiant EPFL sur la table devant vous.
- Ne laisser sur votre table que le matériel autorisé, à savoir:
 - carte "Résolution d'un problème de mécanique" reçue au cours;
 - formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto-verso (= 2 pages);
 - stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon, papier vierge (pour brouillons);
 - boisson + ravitaillement léger.
- Attendre le signal pour ouvrir ce feuillet et débiter l'examen; l'intérieur de ce feuillet contient les énoncés de 4 problèmes ainsi que 5 feuilles A3 quadrillées vierges pliées en deux.

Pendant l'examen

- Pour chacun des problèmes:
 - utiliser une nouvelle feuille A3 quadrillée vierge;
 - écrire, en caractères d'imprimerie, votre nom en haut à droite sur la première page (lorsque la feuille est fermée), ainsi que le numéro "nnn", comme indiqué sur la figure ci-contre;
 - écrire lisiblement le développement menant à la solution;
 - encadrer la réponse finale à chaque question posée dans l'énoncé;
 - si la solution nécessite plus d'une feuille A3 recto-verso, utiliser les feuilles supplémentaires en y notant aussi votre nom et numéro (si nécessaire des feuilles supplémentaires vous seront fournies).
- Ne pas écrire les solutions de deux problèmes différents sur la même feuille.
- Le papier brouillon vierge (non fourni) est autorisé; les brouillons ne seront pas corrigés.
- Ne pas laisser vos brouillons ou vos solutions à côté de vous.
- Ne pas quitter la salle sans autorisation.



A la fin de l'examen (après 3h ou quand vous avez terminé)

- Ecrire dans les cases ci-contre votre heure de fin d'examen et le nombre de feuilles de solution rendues (ne pas compter les feuilles restées vierges).

Heure de fin d'examen

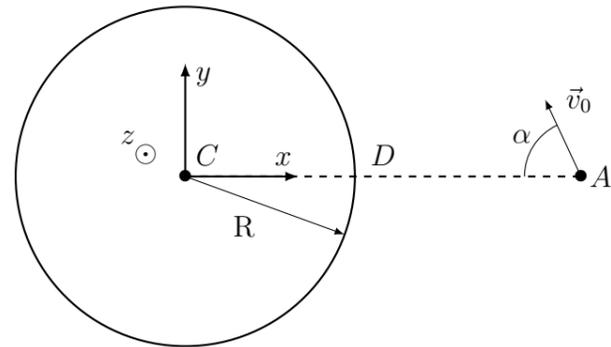
Nombre de feuilles rendues

- Rendre ce feuillet d'énoncé contenant toutes vos feuilles de solution en mains propres à un surveillant de la salle, qui vous fera signer un registre indiquant le nombre de feuilles de solution rendues.

1 Astéroïde (17 points)

On étudie le mouvement d'un astéroïde A, considéré comme un point matériel de masse m . Le mouvement s'effectue au voisinage de la Terre, considérée comme une sphère homogène de rayon R et de masse M . On note C son centre, et on considère ce point comme fixe dans un référentiel d'inertie. On note $\vec{r} = \overrightarrow{CA}$ le vecteur position de l'astéroïde. La seule force exercée sur l'astéroïde est la force de gravitation de la Terre:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



A l'instant $t = 0$, l'astéroïde se trouve à une distance D du centre de la terre et a une vitesse \vec{v}_0 , contenue dans le plan xy et faisant un angle α avec le vecteur \overrightarrow{AC} , comme indiqué sur le dessin.

- Quelles sont les quantités conservées? Justifier votre réponse. Donner leurs expressions en fonction des données du problème, dans un système de coordonnées polaires d'origine C . [6 pts]
- Donner une condition sur α et l'énergie mécanique initiale de l'astéroïde pour que ce dernier entre en contact avec la Terre au cours de son mouvement. [6 pts]

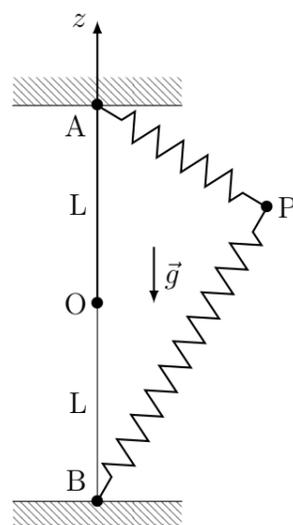
On se place dans la situation où l'astéroïde entre en collision avec la Terre. On considère que le choc est parfaitement mou (l'astéroïde et la Terre fusionnent). Avant le choc, la Terre est en rotation avec une vitesse $\vec{\omega}_i$. Après le choc, le système est considéré comme une sphère homogène de rayon R et de masse $m + M$.

- Calculer le vecteur la vitesse instantanée de rotation $\vec{\omega}_f$ après le choc. L'axe de rotation de la Terre peut-il changer de direction en raison du choc? Si oui à quelle condition? [5 pts]

2 Masse et ressorts (14 points)

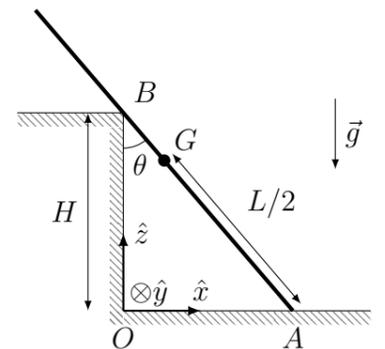
On considère un point matériel P de masse m attaché à deux ressorts identiques de raideur k , de masse nulle et de longueur à vide nulle, chacun attaché à un point fixe comme indiqué sur le dessin. Les deux supports sont séparés d'une distance $2L$. Les points d'attache A et B sont alignés suivant la direction verticale. Le système est soumis à la pesanteur.

- Donner la liste des forces exercées sur P , et leurs composantes en fonction des coordonnées de P , dans un système de coordonnées d'origine O . [3 pts]
- Déterminer la position d'équilibre de P . [2 pts]
- Ecrire les équations du mouvement pour P . [2 pts]
- Calculer le moment cinétique de P par rapport au point O , et montrer que sa composante suivant l'axe z est conservée au cours du mouvement. [4 pts]
- On déplace P d'une distance D dans une direction quelconque par rapport à sa position d'équilibre, et on le relâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Déterminer la position de P en fonction du temps pour $t > 0$ (équation horaire). [3 pts]



3 Tige appuyée contre un seuil (8 points)

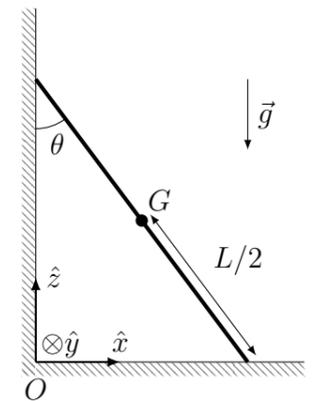
Une tige fine de longueur L et de masse m a une extrémité posée sur un sol horizontal, et est appuyée contre un seuil de hauteur $H = L/2$. L'angle que la tige forme avec la verticale est noté θ . On étudie la situation statique, et on ne considère que les angles $0 < \theta < \pi/3$, de sorte que la tige soit toujours appuyée sur l'angle du seuil au point B , comme illustré sur le dessin. Le sol applique une force de frottement statique de coefficient μ_s sur le pied de la tige (au point A), mais il n'y a pas de force de frottement au point d'appui sur l'angle supérieur du seuil (au point B).



- Donner la liste des forces qui s'appliquent sur la tige, et les représenter sur un dessin avec leurs points d'application. [2 pts]
- Déterminer la condition sur le coefficient μ_s pour que l'équilibre statique soit réalisé, et l'exprimer en fonction de l'angle θ et des données du problème. [6 pts]

4 Tige glissante (16 points)

Une tige fine de longueur L , de masse m a une extrémité posée sur un sol horizontal, et est appuyée contre un mur vertical. L'angle que la tige forme avec la verticale est noté θ . On lâche la tige avec une vitesse nulle à un angle initial $\theta = \pi/3$, et on étudie le mouvement de la tige dans sa chute. Dans ce problème, les forces de frottement sont négligeables.



- Dans le repère indiqué, exprimer les composantes du vecteur position \vec{r}_G du centre de masse de la tige en fonction de l'angle θ et de la longueur L . En déduire les vecteurs vitesse \vec{v}_G et accélération \vec{a}_G . [2 pts]
- Ecrire les équations du mouvement. En déduire une équation différentielle pour l'angle θ qui ne dépende que des données du problème. [7 pts]
- Trouver une intégrale première du mouvement et donner son expression. [4 pts]
- Durant la chute de la tige, à partir de quel angle θ l'extrémité supérieure de la tige se décolle-t-elle du mur vertical? [3 pts]

Indications:

- Le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre de masse G est $I_G = \frac{2}{5}MR^2$.
- Le moment d'inertie par rapport au centre de masse G d'un cylindre de masse M , de longueur L et de rayon négligeable est $I_G = \frac{1}{12}ML^2$ dans une direction perpendiculaire à l'axe du cylindre.
- Relations trigonométriques:
 $\sin(\theta \pm \pi/2) = \pm \cos \theta$; $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$; $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$; $\sin(\pi/6) = 1/2$;
 $\cos(\theta \pm \pi/2) = \mp \sin \theta$; $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$; $\cos(\pi/3) = 1/2$; $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

Rappel: Ecrire, en caractères d'imprimerie, votre nom en haut à droite sur la première page de chacune des feuilles de solution ainsi que le numéro "nnn"