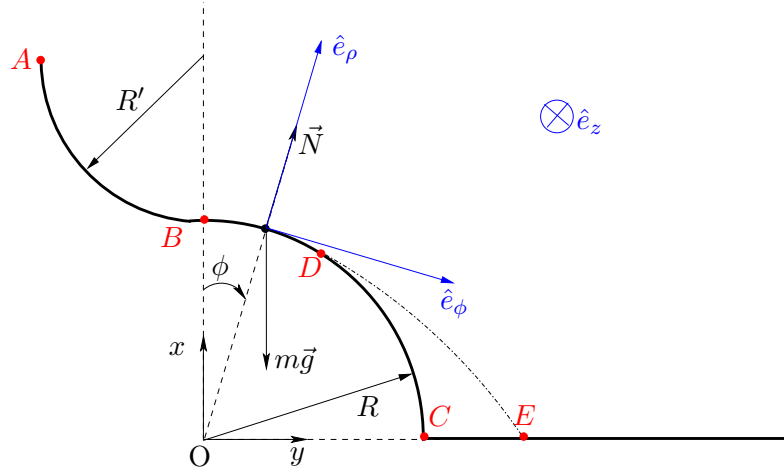


Problème 1 : Saut en luge (11 points)

a) [2.5 points]



Les forces agissant sur la luge sont le poids $m\vec{g}$ et, lorsque le luge est en contact avec la piste, la force de soutien \vec{N} de la piste. [1 pt; -0.5 par force oubliée ou en trop]

Sur un petit déplacement $d\vec{r}$ de la luge, le travail du poids vaut $m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\hat{e}_x \cdot d\vec{r} = -mg dx$, qui n'est pas nul si le déplacement a une composante verticale. Donc le poids travaille [0.5 pt]. De plus, il s'agit d'une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin parcouru. [0.5 pt]

Lorsque la luge touche la piste la force de soutien \vec{N} est toujours perpendiculaire à la piste et au vecteur vitesse. Elle ne travaille donc pas [0.5 pt]. Comme elle ne dérive pas d'un potentiel, elle n'est pas conservative.

b) [3 points]

D'après la question précédente, l'énergie mécanique est conservée et son expression est $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$ [1 pt].

En utilisant la conservation de l'énergie entre les points A et B on obtient:

$$\begin{aligned} E_A = E_B &\Rightarrow 0 + mg(R' + R) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgR' \Rightarrow v_B^2 = 2gR' \\ &\Rightarrow v_B = \sqrt{2gR'}. \quad [1 \text{ pt}] \end{aligned} \quad (1)$$

En utilisant la conservation de l'énergie entre les points A et E on obtient:

$$E_A = E_E \Rightarrow mg(R' + R) = \frac{1}{2}mv_E^2 \Rightarrow v_E = \sqrt{2g(R' + R)}. \quad [1 \text{ pt}] \quad (2)$$

c) [2 points]

On utilise le repère associé aux coordonnées cylindriques $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$. La deuxième loi de Newton,

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}, \quad (3)$$

est projetée successivement sur \hat{e}_ρ et \hat{e}_ϕ pour donner les équations du mouvement suivantes:

$$-mg \cos \phi + N_\rho = -mR\dot{\phi}^2, \quad [1 \text{ pt}] \quad (4)$$

$$mg \sin \phi = mR\ddot{\phi}. \quad [1 \text{ pt}] \quad (5)$$

d) [3.5 points]

La conservation de l'énergie mécanique entre le point A et un point quelconque entre B et D repéré par l'angle ϕ donne

$$mg(R' + R) = \frac{1}{2}mv^2 + mgx = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + mgR \cos \phi, \quad (6)$$

d'où l'on tire:

$$R\dot{\phi}^2 = 2g \left(1 + \frac{R'}{R} - \cos \phi \right). \quad [1 \text{ pt}] \quad (7)$$

En introduisant ceci dans l'équation (4), on obtient

$$N_\rho = mg \left[3 \cos \phi - 2 \left(1 + \frac{R'}{R} \right) \right]. \quad [1 \text{ pt}] \quad (8)$$

La condition de décollement est $N_\rho = 0$, c'est-à-dire

$$\cos \phi_D = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{R'}{R} \right). \quad [1 \text{ pt}] \quad (9)$$

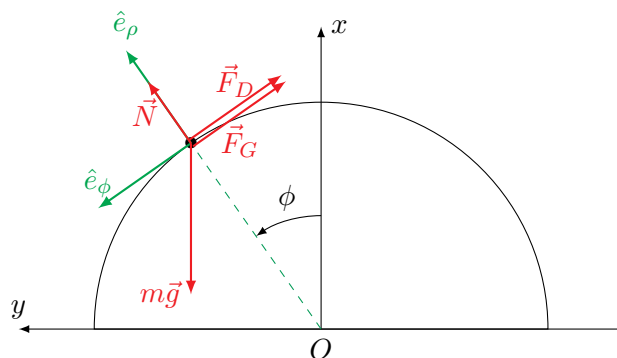
Puisque $R > 2R'$, l'expression de droite est inférieure à 1, et la solution pour l'angle ϕ_D est

$$\phi_D = \arccos \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{R'}{R} \right) \right]. \quad [0.5 \text{ pt}] \quad (10)$$

Problème 2 : Métronome (8 points)

a) [2 points]

Prenons un référentiel lié au support, et un repère en coordonnées cylindriques, comme indiqué sur le dessin. Les forces agissant sur la masse sont le poids $m\vec{g}$, le ressort à droite \vec{F}_D , le ressort à gauche \vec{F}_G et la force de liaison \vec{N} [-0.5 par force incorrectement dessinée, oubliée ou en trop. Sens de \vec{N} inconnu].



b) [3 points]

En coordonnées cylindriques, $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$, avec les contraintes $\rho = R, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$, et $z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$. Donc,

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + R\ddot{\phi} \hat{e}_\phi. \quad (11)$$

Par ailleurs, dans le repère choisi, les forces s'écrivent

$$m\vec{g} = mg(-\cos\phi\hat{e}_\rho + \sin\phi\hat{e}_\phi) \quad (12)$$

$$\vec{F}_D = -kR\dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad (13)$$

$$\vec{F}_G = -kR\phi\hat{e}_\phi \quad (14)$$

$$\vec{N} = N_\rho\hat{e}_\rho \quad (15)$$

Par la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}_{tot}$, nous obtenons donc **[2 pts]** :

$$\begin{cases} -mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - mg\cos\phi \\ mR\ddot{\phi} = mg\sin\phi - 2kR\dot{\phi}. \end{cases} \quad (16)$$

L'équation différentielle pour ϕ est donc

$$\ddot{\phi} - \frac{g}{R}\sin\phi + 2\frac{k}{m}\dot{\phi} = 0 \quad \text{[1 pt]} \quad (17)$$

c) **[2 points]**

Toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas, l'énergie mécanique est donc conservée et son expression est :

$$V = mgx + \frac{1}{2}k(\phi R)^2 + \frac{1}{2}k(\phi R)^2 \quad (18)$$

$$V(\phi) = mgR\cos\phi + kR^2\phi^2. \quad \text{[1 pt]} \quad (19)$$

La condition d'équilibre est $\frac{dV}{d\phi} = 0$, avec ici $\frac{dV}{d\phi} = -mgR\sin\phi + 2kR^2\phi$, ce qui donne

$$-mgR\sin\phi + 2kR^2\phi = 0 \quad (20)$$

$$-\sin\phi + \frac{2kR}{mg}\phi = 0 \quad \text{[1 pt]} \quad (21)$$

dont $\phi = 0$ est bien une solution possible.

d) **[1 point]**

Pour que l'équilibre soit stable, on doit avoir $\frac{d^2V}{d\phi^2} \geq 0$ au point d'équilibre, or

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = -mgR\cos\phi + 2kR^2. \quad (22)$$

En $\phi = 0$, la condition s'écrit donc $-mgR + 2kR^2 \geq 0$, c'est à dire

$$\frac{kR}{mg} \geq \frac{1}{2}$$