
Ne pas retourner cette feuille avant le signal de début d'examen
... mais lire attentivement cette page de couverture

(Les instructions ci-dessous sont celles de l'examen final)

*** SEUL LE CAHIER DE REPONSES SERA CORRIGE ***

Avant le début de l'examen

- Attendre le signal pour ouvrir ce feuillet et débiter l'examen
- Vérifier les informations présentes sur le cahier de réponses
- Signer la page de garde du cahier de réponse
- Poser votre carte d'étudiant EPFL sur la table devant vous.
- Ne laisser sur votre table que le matériel autorisé, à savoir:
 - formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto-verso;
 - stylos, crayons, gomme, règle, compas, équerre, taille-crayon;
 - boisson et ravitaillement léger.

Pendant l'examen

- Bien suivre les instructions du cahier de réponses.
- Ne pas laisser vos brouillons ou vos solutions à côté de vous.
- Pour toute requête, levez la main et attendez. Ne pas quitter la salle sans autorisation.

Après 3h30 ou quand vous avez terminé

- Restez assis à votre place en silence et attendez l'arrivée d'un surveillant.
- Rendre le cahier de réponses **signé**, le feuillet d'énoncé et les brouillons (non corrigés) en mains propres à un.e surveillant.e.

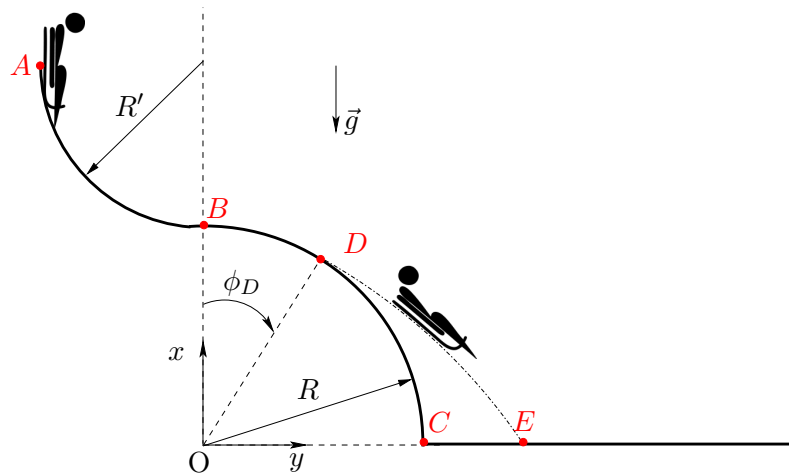
Formulaire :

Accélération en coordonnées cylindrique : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$

Accélération en coordonnées sphériques : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi$

Problème 1 : Saut en luge (11 points)

Un système, considéré comme un point matériel, est constitué d'une luge et d'un lugeur de poids total mg . Il part avec une vitesse nulle d'un point A au sommet d'une piste verglacée ayant la forme indiquée sur la figure. Au point A la piste est verticale. Entre les points A et B, la piste est concave et forme un quart de cercle de rayon R' dans le plan vertical. Au point B la piste est horizontale. Entre les points B et C, la piste est convexe et forme un quart de cercle de rayon $R (> 2R')$ dans le plan vertical. Après le point C, la piste est horizontale. La luge décolle de la piste au point D, repéré par un angle ϕ_D , comme indiqué sur la figure, puis atterrit sur la partie horizontale de la piste en un point E.

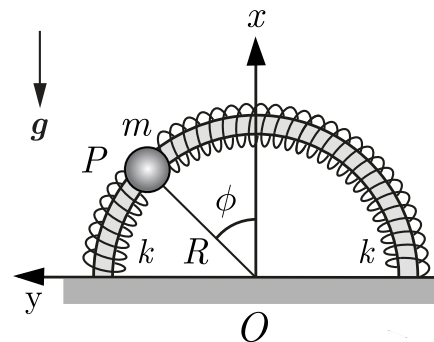


On néglige tous les frottements.

- Enumérer les forces qui agissent sur le système et les représenter sur un dessin. Pour chacune d'elles, indiquer si elle travaille et, si c'est le cas, dire si elle est conservative.
- Calculer la norme de la vitesse v_B au point B, ainsi que la norme de la vitesse v_E au point E.
- Ecrire les équations du mouvement du système 'luge+lugeur' (dans un plan vertical) lorsqu'il se trouve sur le quart de cercle de rayon R (entre les points B et D).
- Calculer la position (angle ϕ_D) du point D de décoller de la luge.

Problème 2 : Métronome (8 points)

Un métronome est modélisé par un point matériel P de masse m , attaché à deux ressorts identiques de raideur k , de longueur à vide $l_0 = \pi R/2$ et de masse négligeable, qui coulisent **sans frottements** le long d'un demi-anneau de rayon R , dans un plan vertical. Les extrémités inférieures des ressorts sont fixées au bas du demi-anneau, de part et d'autre de celui-ci. Le support restreint l'angle ϕ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.



- Faire la liste des forces qui s'exercent sur le point P et les représenter sur un dessin, en prenant soin que leurs directions soient bien lisibles.
- Écrire une équation différentielle pour l'angle ϕ .
- Après avoir exprimé l'énergie mécanique E du système, montrer que $\phi = 0$ est une position d'équilibre.
- Donner la condition sur les paramètres du problème (m, k, R) pour que $\phi = 0$ soit une position d'équilibre stable.