Série 21

$*$**Exercice 1.** On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 3\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Démontre par récurrence que $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontre que $a_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Démontre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et précise si elle est croissante ou décroissante.

d) Démontre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donne sa limite.

Exercice 2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

a) Démontre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$ implique $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) Montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

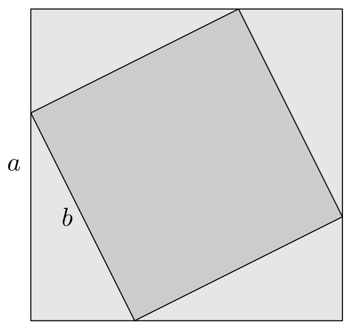
c) Déduis de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donne sa limite.

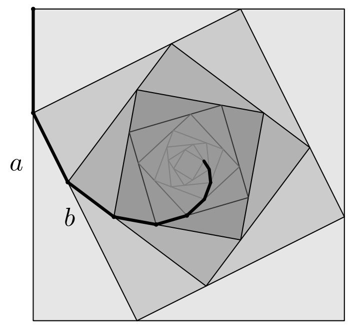
Exercice 3. On considère un carré de côté 1. On inscrit dans ce carré un cercle, puis dans ce cercle un carré. Puis on recommence encore et encore. Calcule la somme des aires de tous ces carrés. Calcule aussi la somme des aires de tous les disques.

Exercice 4. Dans un carré de côté a, on inscrit un autre carré dont les sommets se trouvent au tiers de la longueur des côtés initiaux (figure de gauche ci-dessous).

a) Calcule la longueur b du côté de ce nouveau carré en fonction de a.

b) On itère indéfiniment cette procédure. Si $a = 1$, calcule la longueur totale de la spirale dont les premiers segments sont tracés dans la figure de droite :





Exercice 5. Détermine, si elle existe, la limite de chacune des suites données par leur terme général ci-dessous (dans chaque cas, $n \in \mathbb{N}^*$).

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$

b) $b_n = \dfrac{7n}{3-5n}$

c) $c_n = -\dfrac{5-n^2}{n+2}$

d) $d_n = \dfrac{3n^2-5n+6}{2n^2-3}$

e) $e_n = \dfrac{n^2}{1-n}$

f) $f_n = \dfrac{5n^3+n^2}{3n^5-2}$

Exercice 6. Détermine, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{3^n-1}$.