

TDS :

	-1	1	
$(x+1)^2$	+	0	+
$x+1$	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	0
$f(x)$	-	+	+

- Trou en $(-1; 0)$ car $\tilde{f}(-1) = 0$, et AV en $x = 1$ car " $f(1)$ " de la forme " $\frac{\text{nb. non nul}}{0}$ " (voir TDS).

AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne

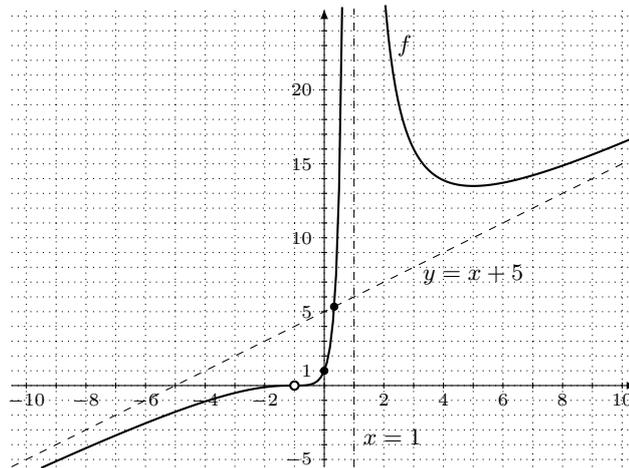
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+5)(x^2 - 2x + 1) + 12x - 4$$

donc $\tilde{f}(x) = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2}$. D'où $y = x + 5$ est AO, et $\delta(x) = \frac{12x-4}{(x-1)^2}$ avec $Z(\delta) = \{\frac{1}{3}\}$.

TDP (il n'est pas nécessaire d'inclure la VI $x = -1$ dans le tableau si on garde en tête $D(f)$; en effet, la courbe $y = \delta(x)$ n'est qu'un guide pour aider à la représentation du graphe de f) :

	$\frac{1}{3}$	1	
$12x - 4$	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	0
$\delta(x)$	-	0	+
$\tilde{f}(x)/\text{AO}$	sous χ	sur	sur

- Graphe (avec $f(0) = 1$) :



- d) • VI(f) : $x(x^2 + 1) = 0$ | $Z(f)$: $x(x^3 + 1) = 0$
 $x = 0$ | $x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
 $(x^2 + 1 \text{ n'est jamais nul})$ | $x = 0 \text{ et } x = -1 \text{ sont les zéros du numérateur}$
 (le Δ de $x^2 - x + 1$ est négatif) mais $x = 0$ n'est pas un zéro de f (car VI)

Donc $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Z(f) = \{-1\}$ et la forme réduite (factorisée) de $f(x)$ est $\tilde{f}(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2+1}$.

TDS :

	-1	0	
$x+1$	-	0	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+
$f(x)$	-	0	+

- Trou en $(0; 1)$ (car $\tilde{f}(0) = 1$), et pas d'AV (parce que \tilde{f} n'a pas de VI).

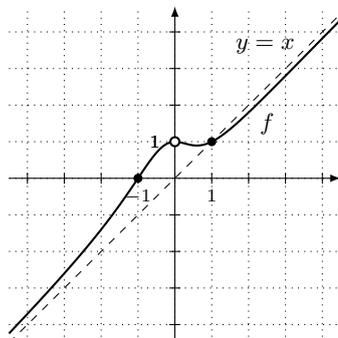
AO : L'équation fondamentale de la division de $x^3 + 1$ par $x^2 + 1$ est $x^3 + 1 = x \cdot (x^2 + 1) - x + 1$, donc

$\tilde{f}(x) = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$. D'où $y = x$ est AO, et $\delta(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$ (avec $Z(\delta) = \{1\}$).

TDP :

	1
$-x + 1$	+ 0 -
$x^2 + 1$	+ +
$\delta(x)$	+ 0 -
$\tilde{f}(x)/AO$	sur χ sous

• Graphe :



Exercice 4.

• **Expression de f .** Comme il n'y a pas de "trou", on peut supposer que $f(x)$ est sous forme irréductible.

Les deux AV d'équations $x = -3$ et $x = 2$ indiquent que le dénominateur de $f(x)$ aura au moins comme facteurs $(x + 3)$ et $(x - 2)$. Supposons donc que le dénominateur est bien $(x + 3)(x - 2)$.

L'AO d'équation $y = -2$ donne alors $f(x) = -2 + \frac{r(x)}{(x+3)(x-2)}$ où $r(x) = ax + b$ (le degré du numérateur de $\delta(x)$ est nécessairement strictement inférieur au degré du diviseur).

Donc $f(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 12 + ax + b}{x^2 + x - 6}$. Comme $f(0) = 0$, le numérateur de $f(x)$ évalué en 0 est nul, et alors $b = -12$.

Avec $f(x) = \frac{-2x^2 - 2x + ax}{x^2 + x - 6} = \frac{x(-2x - 2 + a)}{x^2 + x - 6}$ et le fait que f n'a qu'un seul zéro, on déduit $a = 2$ et

$$f(x) = \frac{-2x^2}{(x + 3)(x - 2)}$$

Une étude succincte du signe de $f(x)$ (par exemple, on remarque que $f(x)$ est négatif si $x < -3$, puis, au vu du degré de chacun de ses facteurs, $f(x)$ change de signe en $x = -3$, en $x = 2$, mais pas en $x = 0$) peut confirmer que le graphe donné correspond bien à cette expression.

• **Expression de g .** Comme dans le cas précédent, on peut supposer que $g(x)$ est sous forme irréductible.

Les deux AV d'équations $x = -2$ et $x = 0$ suggèrent que le dénominateur est $x(x + 2)$.

L'AO d'équation $y = x$ mène alors à $g(x) = x + \frac{r(x)}{x(x+2)}$ où $r(x) = ax + b$. Comme le graphe de g intersecte l'AO en $x = 1$, on a $r(1) = 0$, c'est-à-dire $b = -a$.

Donc $g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + ax - a}{x^2 + 2x}$. Avec $g(-1) = 1$, on obtient $\frac{1-2a}{-1} = 1$, soit $a = 1$, et alors

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x}$$

Le numérateur de $g(x)$ n'est pas facilement factorisable par les méthodes que nous connaissons : nous ne vérifions pas plus loin cette expression (qui, par ailleurs, est bien l'expression de la fonction représentée!).

Exercice 5. L'ensemble $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ est majoré par $2 \in \mathbb{Q}$ car pour tout $y \in S$, on a $y \leq \sqrt{2} < 2 \in \mathbb{Q}$ (en effet, si $\sqrt{2} < y$, alors $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot y < y \cdot y = y^2$, c'est-à-dire $y \notin S$). Voyons que $\sqrt{2}$ est bien la borne supérieure de S (comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on aura gagné).

Supposons par contradiction que S possède une borne supérieure b avec $b < \sqrt{2}$ (pour l'exercice, on espère trouver un tel $b \in \mathbb{Q}$). Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $b < r < \sqrt{2}$. Cependant, cette dernière inégalité signifie que $r \in S$ or cela n'est pas possible car b était supposé être une borne supérieure, et donc en particulier un majorant de S .

Exercice 6. Montrons tout d'abord que l'intervalle $]a; b[$ contient un nombre infini de rationnels. Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. Par conséquent, nous pouvons écrire $]a; b[\cap \mathbb{Q} = \{r_1, \dots, r_n\}$ avec la propriété que $a < r_1 < \dots < r_n < b$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe un nombre $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < r_1$.

On arrive donc à la contradiction que $q \in]a; b[\cap \mathbb{Q}$ mais pourtant $q \notin \{r_1, \dots, r_n\}$. Ainsi notre hypothèse de départ est fautive et donc $]a; b[$ contient une infinité de rationnels.

Étant donné qu'entre deux rationnels, il y a toujours un irrationnel (par exemple, si $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, alors $r = a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a)$ est un irrationnel strictement compris entre a et b), on conclut qu'il y a également une infinité d'irrationnels.

Exercice 7.

- a) Faux car $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.
- b) Faux car $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.
- c) Vrai, soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels alors $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{ad+bc}{2bd} \in \mathbb{Q}$.
- d) Faux car $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + (-\sqrt{2})) = 0 \in \mathbb{Q}$.
- e) Cette assertion est vraie. Supposons le contraire et soit n un entier premier tel que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible (c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux). En élevant cette égalité au carré on a $nq^2 = p^2$; donc n divise p^2 et figure forcément dans la décomposition en facteurs premiers de p : $p = np'$. Ceci implique $nq^2 = n^2p'^2$, $q^2 = np'^2$, et donc n divise q^2 . Ainsi n figure forcément dans la décomposition en facteurs premiers de q , mais alors p et q ne sont pas premiers entre eux, ce qui est une contradiction.
- f) Faux car $\sqrt[3]{8} = 2$.

Exercice 8. Raisonnons par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $n = 0$, la somme à gauche de l'égalité vaut 1; à droite de l'égalité, on a $\frac{1 - x^{1+0}}{1 - x} = 1$ pour tout $x \neq 1$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que l'égalité est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$$1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} = (1+x+x^2+\dots+x^n)+x^{n+1} \stackrel{\text{réc.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

L'égalité est donc vraie pour $n + 1$ si elle l'est pour n . Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons que pour $n = 1, 2$, cette formule est déjà apparue dans le cadre de la factorisation de polynômes sous la forme :

$$(1-x) \cdot (1+x+x^2+\dots+x^n+x^n) = 1-x^{n+1}.$$

En prenant l'égalité que l'on vient de démontrer avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Exercice 9. Appelons $P(n)$ l'égalité $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Montrons $P(0)$. D'un côté, $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0$. De l'autre, $\frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$. Les deux côtés valent 0, l'égalité est démontrée dans ce cas.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n + 1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée, et $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.