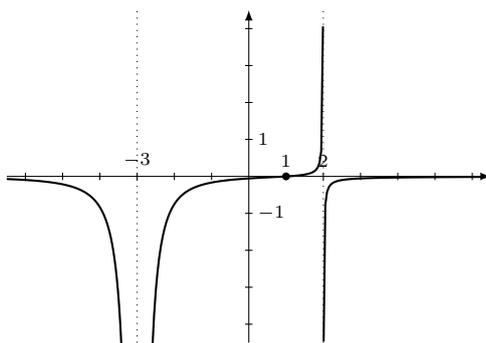


Exercice 1.

a) La fonction n'est pas définie en $x = 2$ et $x = -3$ et donc $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Comme le numérateur de $f(x)$ est non nul pour ces x , les droites d'équation $x = 2$ et $x = -3$ sont bien des asymptotes verticales de f .
TDS :

	-3	1	2	
$x - 1$	-	0	+	+
$2 - x$	+	+	0	-
$(x + 3)^2$	+	0	+	+
$f(x)$	-	- 0 +	-	

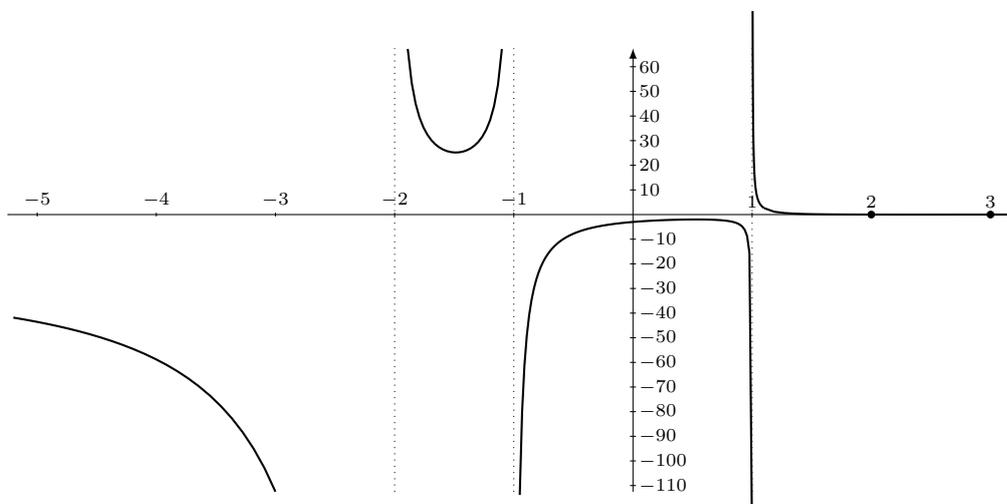
La division de $x - 1$ par $(2 - x)(x + 3)^2$ donne un quotient de 0 et un reste de $x - 1$. Donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.



b) Comme $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)}$, la fonction n'est pas définie en $x = 1$, $x = -1$ et $x = -2$, ainsi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$. De plus, le numérateur de $f(x)$ est non nul pour ces x ; les droites d'équation $x = 1$, $x = -1$ et $x = -2$ sont bien des asymptotes verticales de f .
TDS :

	-2	-1	1	2	3	
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	+	0	- 0 +
$x^2 - 1$	+	+	0	- 0 +	+	+
$x + 2$	- 0 +	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	+	-	+ 0 - 0 +		

La division de $(x^2 - 5x + 6)^3$ par $x^3 + 2x^2 - x - 2$ donne un quotient de 0 et un reste de $x^2 - 5x + 6$. Donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.



(L'échelle ne permet malheureusement pas de voir que le graphe de f passe bien sous l'axe des abscisses de $x = 2$ à $x = 3$, repasse dessus en $x = 3$, puis se rapproche de l'asymptote horizontale $y = 0$.)

- c) Comme $f(x) = \frac{4x^2 - x^3}{3x^2 + 6x} = \frac{x^2(4-x)}{3x(x+2)}$, les VI sont $x = -2$ et $x = 0$ et donc $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$. Le numérateur de $f(x)$ est non nul pour $x = -2$; la droite d'équation $x = -2$ est bien une asymptote verticale pour f . Avec $D(f)$ en tête, nous pouvons pour la suite considérer l'expression simplifiée (valable pour $x \neq 0$)

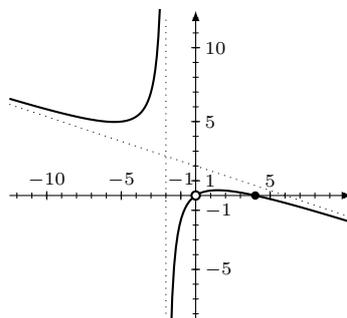
$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{3x + 6}$$

Cette forme simplifiée (nous verrons plus loin dans le cours qu'il s'agit de la "prolongée par continuité de f " en $x = 0$) nous permet de déterminer les coordonnées du "trou" : $(0; 0)$.

TDS :

	-2	0	4	
$-x^2 + 4x$	-	0	+	0
$3x + 6$	-	0	+	+
$f(x)$	+	-	+	-

La division de $-x^2 + 4x$ par $3x + 6$ donne un quotient de $-\frac{1}{3}x + 2$ et un reste de -4 . Donc $y = -\frac{1}{3}x + 2$ est une asymptote oblique.



Position de la courbe par rapport à l'AO. Pour a) et b), l'asymptote oblique est horizontale en $y = 0$; le TDP est essentiellement le même que le TDS avec $\delta(x) = f(x)$. Pour c), on aura $\delta(x) = \frac{-4}{3x+6}$, jamais nul; la courbe n'intersecte jamais l'asymptote, et le TDS suffit pour déduire la position de la courbe par rapport à l'AO.

Exercice 2.

- a) Transformons l'inéquation donnée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} &> \frac{5x - 4}{x - 3} \\ \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} - \frac{5x - 4}{x - 3} &> 0 \\ \frac{5x^2 + 2}{(x-3)(x+3)} - \frac{5x - 4}{x - 3} &> 0 \\ \frac{5x^2 + 2 - (x+3)(5x - 4)}{(x-3)(x+3)} &> 0 \\ \frac{5x^2 + 2 - (5x^2 - 4x + 15x - 12)}{(x-3)(x+3)} &> 0 \\ \frac{-11x + 14}{x^2 - 9} &> 0 \end{aligned}$$

TDS :

	-3	$\frac{14}{11}$	3	
$-11x + 14$	+	0	-	-
$x^2 - 9$	+	0	-	+
$f(x)$	+	-	+	-

$f(x)$ est strictement positif lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{14}{11}; 3[$ et donc $S =]-\infty; -3[\cup]\frac{14}{11}; 3[$.

- b) Procédons de la même manière qu'au point précédent :

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 12x + 2}{2x^2 + 3x + 4} &> 2 \\ \frac{4x^2 + 12x + 2}{2x^2 + 3x + 4} - 2 &> 0 \end{aligned}$$

$$\frac{4x^2 + 12x + 2}{2x^2 + 3x + 4} - \frac{2(2x^2 + 3x + 4)}{2x^2 + 3x + 4} > 0$$

$$\frac{6x - 6}{2x^2 + 3x + 4} > 0 \quad (\text{le dénominateur de la fraction a un discriminant négatif})$$

TDS :

	1
$6x - 6$	- 0 +
$2x^2 + 3x + 4$	+ 0 +
$f(x)$	- 0 +

Ainsi $S =]1; +\infty[$.

c) $\frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$

$$\frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} - \frac{10(x - 1)}{x - 1} > 0$$

$$\frac{x^2 + 26}{x - 1} > 0$$

TDS :

	1
$x^2 + 26$	+ 0 +
$x - 1$	- 0 +
$f(x)$	- 0 +

Ainsi $S =]1; +\infty[$.

d) $\frac{5}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4} \geq \frac{3}{x^2 - 9}$

$$\frac{5(x+2)(x+3)}{5(x-2)(x-3)} - \frac{2(x-2)(x+2)}{2(x-3)(x+3)} - \frac{3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{5(x+2)(x+3)(x-2)(x-3) - 2(x-3)(x+3) - 3(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{5(x^2 - 5x + 6) - 2(x^2 - 9) - 3(x^2 - 4)}{-25x + 60} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x+3)(x-2)(x-3) - 5(5x - 12)}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)} \geq 0$$

TDS :

	-3	-2	2	$\frac{12}{5}$	3
$-25x + 60$	+ 0 +	+ 0 +	+ 0 +	+ 0 -	- 0 -
$x^2 - 4$	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 +
$x^2 - 9$	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 +
$f(x)$	+ - +	- + -	- 0 +	- 0 +	- -

Ainsi $S =]-\infty; -3[\cup]-2; 2[\cup]\frac{12}{5}; 3[$.

Exercice 3.

$$(x + 1)^2 - |x - 2| \geq 0 \iff (x + 1)^2 \geq |x - 2|$$

$$\iff (x + 1)^2 \geq x - 2 \geq -(x + 1)^2$$

$$\iff x^2 + 2x + 1 \geq x - 2 \geq -x^2 - 2x - 1$$

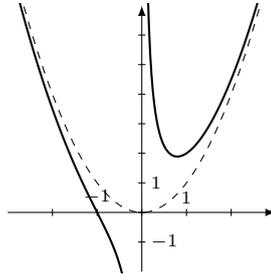
$$\iff \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq x - 2 & \text{et} \\ x - 2 \geq -x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + x + 3 \geq 0 & \text{et} \\ x^2 + 3x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

La première inégalité est vraie quel que soit $x \in \mathbb{R}$ car le discriminant de l'équation $x^2 + x + 3 = 0$ est négatif (donc $f(x) = x^2 + x + 3$ ne change pas de signe, et comme $f(0) = 3 > 0$, la fonction f est toujours positive). En étudiant le signe de l'équation de la fonction quadratique $x^2 + 3x - 1$, on en conclut qu'elle est positive ou nulle pour $x \in]-\infty; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; +\infty[$.

Exercice 4.

- a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; comme la fraction rationnelle est réduite, $x = 0$ est asymptote verticale. Le quotient de la fraction rationnelle est x , si bien que $f(x)$ admet aussi une asymptote oblique $y = x$.
- b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le quotient est égal à x^2 qui représente bien une parabole. On a tracé la fonction f avec un trait continu dans la figure ci-dessous ainsi que son asymptote en traitillés.



- c) En effectuant la division euclidienne de $4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ par $x^2 + 1$, on obtient $4x - 3$ comme quotient.
- d) Le quotient de la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$ est $x - 5$ et donc $f(x)$ admet l'asymptote oblique d'équation $y = x - 5$.

Exercice 5. On commence par remarquer que c doit être non nul pour que la fonction ait une AV. On suppose donc dorénavant $c \neq 0$.

Comme $x = 3$ est AV, $x = 3$ est VI, et on doit avoir $3c + d = 0$, c'est-à-dire $d = -3c$.

La division euclidienne de $ax + b$ par $cx + d$ donne un quotient de $\frac{a}{c}$. L'asymptote oblique sera forcément horizontale, et d'équation $y = \frac{a}{c}$. Comme cette équation doit être $y = -2$, on trouve $a = -2c$.

La condition $f(2) = 0$ se traduit au numérateur par $a \cdot 2 + b = 0$, c'est-à-dire $-2c \cdot 2 + b = 0$, d'où $b = 4c$. Donc

$$f(x) = \frac{-2cx + 4c}{cx - 3c} = \frac{c(-2x + 4)}{c(x - 3)} = \frac{-2x + 4}{x - 3}$$

Tant que a , b , c et d sont liées par $a = -2c$, $b = 4c$, $d = -3c$ et $c \neq 0$, la fonction sera $f(x) = \frac{-2x+4}{x-3}$, une fonction qui vérifie bien les conditions de l'énoncé.

Remarque méthodologique. As-tu observé que le début de cette correction donne des conditions nécessaires, mais que l'énoncé demande des conditions suffisantes? La dernière phrase répond en fait à la question de l'énoncé. (Alternativement, si $c \neq 0$, les raisonnements présentés comme des implications sont des équivalences.)