Corrigé série 16

Exercice 1 (10 points)

a) On a $\dim M_2(\mathbb{C}) = 4$, comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une base est

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

b) Un tel polynôme est de la forme $c(x-1)(x-7)(x-r)$, où $r, c \in \mathbb{C}$, ou bien, de la forme $(x-1)(x-7)(cx-r')$, où $c, r' \in \mathbb{C}$. Donc, une base de l'ensemble de tels polynômes est

$$((x-1)(x-7), x(x-1)(x-7)),$$

et la dimension est 2.

c) On a $\dim \mathbb{C}^5 = 5$. Une base est

$$((1;0;0;0;0), (0;1;0;0;0), (0;0;1;0;0), (0;0;0;1;0), (0;0;0;0;1)).$$

d) On a $\dim \mathbb{C}[x] = \infty$. Une base est

$$(1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots).$$

e) On a $\dim\{(z;z';z'') \in \mathbb{C}^3 : z + z' + z'' = 0\} = 2$. Une base est

$$((1;-1;0), (0;1;-1)).$$

f) Une application linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ doit satisfaire

$$f(\lambda z) = \lambda f(z)$$

pour tout $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Soit $f(1) = c$. Alors,

$$f(z) = f(z \cdot 1) = z f(1) = cz$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc,

$$\dim\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ est linéaire}\} = 1,$$

et une base est $\{f_1\}$, où f_1 est définie par $f_1(z) = z$.

Exercice 2 (10 points)

a) On a que

$$\operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}$$
$$= a + \lambda a' + d + \lambda d'$$

et

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (a+d) + \lambda(a'+d').$$

Donc, Tr est linéaire.

b) On a $\ker \operatorname{Tr} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \;\middle|\; a = -d\right\}$, donc une base de ker Tr est

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Pour tout $k \in K$, on a $\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k$, donc une base de ImTr est $\{1\}$.

Exercice 3 (10 points)

a) La fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire :

$$f(i \cdot i) = f(-1) = -1,$$

mais

$$if(i) = i \cdot \overline{i} = 1.$$

Cependant, f est $\mathbb{R}$-linéaire, comme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} = \lambda f(z)$$

et

$$f(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = f(z) + f(w).$$

b) Non, $f(z) = |z|$ n'est pas $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-linéaire. Par exemple,

$$f(1-1) = 0 \neq 2 = f(1) + f(-1).$$

c) L'application $f(z) = az + b$ est $\mathbb{R}$- et $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $b = 0$. En effet, si f est linéaire, on a que, pour tout $\lambda, z, w \in \mathbb{C}$,

$$f(z + \lambda w) = a(z + \lambda w) + b = az + \lambda(aw) + b,$$

ce qui vaut $f(z) + \lambda f(w) = az + \lambda(aw) + b + b$ si et seulement si $b = 0$.

d) Non, $f(z) = z^2$ n'est pas $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-linéaire :

$$f(1-1) = f(0) = 0^2 = 0,$$

mais

$$f(1) + f(-1) = 1^2 + (-1)^2 = 2.$$

e) Non, $f(z) = e^z$ n'est pas $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-linéaire :

$$f(1-1) = e^0 = 1,$$

mais

$$f(1) + f(-1) = e + e^{-1} > e > 1.$$

Exercice 4 (10 points)

Notons que

$$-\frac{3}{2}(4;2;1;2) + \frac{7}{2}(0;0;1;2) = (-6;-3;2;4).$$

Une base de L est $\{(2;1;0;0), (0;0;1;2)\}$ (en particulier, $\dim L = 2$).

Notons que

$$5(3;5;5;3) - 8(2;3;3;2) = (-1;1;1;-1).$$

Une base de M est

$$\{(1;0;0;1), (0;1;1;0)\}.$$

Notons que $(2;1;1;2) \in L$ et

$$(2;1;1;2) = 2(1;0;0;1) + (0;1;1;0).$$

On voit facilement que $1 \leq \dim(L \cap M) < 2$, donc $\dim(L \cap M) = 1$.

Notons que

$$(2;1;0;0) + (0;0;1;2) - 2(0;1;1;0) = 2(1;0;0;1).$$

Donc,

$$\dim(L + M) \leq 3.$$

Or, il est facile de voir que $\dim(L + M) > 2$. Donc, $\dim(L + M) = 3$.

Maintenant, il est trivial de vérifier que

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M).$$

Exercice 5 (10 points)

a) **Faux.** Il faut aussi que $f(1) = 1$. Si $A = B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $f(x) = 3x$, alors

$$f(ab) = 3ab$$

et

$$f(a)f(b) = 3a \cdot 3b = 9ab = 3ab \mod 6.$$

De plus,

$$f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b) \mod 6.$$

Mais, f n'est pas un homomorphisme d'anneaux.

b) **Vrai.** Comme $f(1) = 1$ pour un homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, pour $n > 0$, on voit par additivité de f que

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}) = n \cdot f(1) = n.$$

On a aussi que

$$f(0) = 0$$

et

$$f(1) + f(-1) = f(1-1) = f(0) = 0.$$

Ainsi, pour $n > 0$, on a

$$f(-n) = f(-1)f(n) = -n.$$

Il n'y a donc qu'un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'identité.

c) **Vrai.** Si $f : V \to W$ est une application linéaire, et si $\dim V > \dim W$, alors f ne peut pas être injective. Comme

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$$

et

$$\dim \mathrm{Im} f \leq \dim W < \dim V,$$

on voit que

$$\dim \ker f > 0.$$

d) **Vrai.** Si $K = \mathbb{C}$, il y a un infinité d'applications linéaires de la forme $f(z) = az$, où $a \in \mathbb{C}$, comme $|\mathbb{C}| = \infty$.

e) **Faux.** Si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors il n'y a que deux applications linéaires $f : K \to K$.

f) **Faux.** Si $\dim V = \infty$ ou $\dim W = \infty$, alors $\dim \mathcal{L}(V, W) = \infty$.

Exercice 6 (10 points)

a) Il est facile de montrer que f est linéaire.

b) On a $\ker f = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$, donc une base de $\ker f$ est

$$((2; 1; 0), (0; 0; 1)).$$

c) En résolvant le système

$$\begin{cases} x - 2y = v \\ 6y - 3x = w \end{cases}$$

on obtient que $\mathrm{Im} f = \{(v; w) \in \mathbb{R}^2 \mid -3v = w\}$, donc une base de $\mathrm{Im} f$ est

$$((1, -3)).$$

Exercice 7 (10 points)

Un isomorphisme $f : \mathbb{C} \to S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$ est donné par

$$f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Pour voir que f est bien un isomorphisme, on note que f est clairement linéaire. On a également

$$f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui est l'identité de $M_2(\mathbb{R})$. De plus, on a que, pour tout $x, y, z, w \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\left((x + iy)(z + iw)\right) &= f\left(xz - yw + i(yz + wx)\right) \\ &= \begin{pmatrix} xz - yw & yz + wx \\ -yz - wx & xz - yw \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(x + iy)f(z + iw) &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -w & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xz - yw & xw + yz \\ -yz - xw & -yw + xz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $f(x+iy)f(z+iw) = f\left((x+iy)(z+iw)\right)$. Ainsi, f est un homomorphisme d'anneaux.

Il est clair que le noyau de f est $\{0\}$. Comme $\dim \mathbb{C} = \dim S = 2$, on déduit que f est un isomorphisme.

Exercice 8 (10 points)

a) Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

sont deux polynômes dans $K[x]$, alors on définit l'addition de $f(x)$ et $g(x)$ comme étant l'addition standard de deux polynômes.

Plus précisément, supposons que $n \leq m$, alors en posant $a_i = 0$ pour $i = n+1, \ldots, m$ (cette liste de coefficients étant vide dans le cas $n = m$), on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_m x^m,$$

et on peut définir l'addition $f(x) + g(x)$ comme

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n \\ + (a_{n+1} + b_{n+1})x^{n+1} + \ldots + (a_m + b_m)x^m. \end{aligned}$$

La multiplication de $f(x)$ par un scalaire $\lambda \in K$ est donnée par

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n.$$

Il est facile de vérifier que cette addition et cette multiplication scalaire donnent à $K[x]$ une structure de K-espace vectoriel.

b) Il découle des définitions de l'addition et de la multiplication scalaire données dans le point précédent que la somme de deux polynômes de degré inférieur à n est un polynôme de degré inférieur à n, et que la multiplication par un scalaire d'un polynôme de degré inférieur à n est un polynôme de degré inférieur à n.

c) Une base immédiate est

$$(1, x, x^2, x^3, x^4),$$

mais elle contient un polynôme de degré 3. On considère donc plutôt la liste

$$(1, x, x^2, x^3 + x^4, x^4), \tag{1}$$

qui ne contient pas de polynômes de degré 3.

Supposons qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$ tels que

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 (x^3 + x^4) + \lambda_4 (x^4) = 0.$$

Alors,

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + (\lambda_3 + \lambda_4) x^4 = 0,$$

ce qui implique

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_3 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

On en déduit facilement que $\lambda_i = 0$, pour tout $i = 0, \ldots, 4$. Ainsi, la liste (1) est K-linéairement indépendante, et est donc une base de $K[x]^{\leq 4}$, comme elle génère ce sous-espace vectoriel. En effet, pour tout $a_0, a_1, a_2, a_3, a_3 \in K$, on a

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 (x^3 + x^4) + (a_4 - a_3)(x^4).$$

d) Il est facile de voir qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel avec base

$$(x^2, x^7).$$

e) Non. Par exemple

$$(x^2 + x) + (-x^2) = x,$$

n'est pas de degré pair. Ainsi, la somme de deux polynômes de degré pair n'est pas nécessairement un polynôme de degré pair.

f) Nommons W l'ensemble considéré, donc

$$W = \{x^2 p(x) \mid p(x) \in K[x]\}.$$

Alors, si $p(x), q(x) \in K[x]$ (donc $x^2 p(x), x^2 q(x) \in W$) et si $\lambda \in K$, on a

$$x^2 p(x) + x^2 q(x) = x^2 (p(x) + q(x)) \in W, \quad \text{et}$$
$$\lambda(x^2 p(x)) = x^2 (\lambda p(x)) \in W,$$

ce qui montre que l'ensemble considéré W est bien un sous-espace de $K[x]$.

Une base possible de W est

$$(x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}.$$

En effet, on voit facilement que les éléments de W sont précisément les polynômes de la forme

$$a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \ldots + a_nx^{n+1},$$

avec $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in K$.

Note : Comme W a, de plus, la propriété

$$w(x) \in W \quad \text{et} \quad f(x) \in K[x] \quad \Rightarrow \quad w(x)f(x) \in W,$$

on dit qu'il s'agit d'un *idéal* de l'anneau $K[x]$. La notation standard pour W est (x^2).

Exercice 9 (10 points)

a) Cela suit de l'observation que si $(a;b)$ est un point sur une droite ℓ passant par l'origine, et si p est l'application de projection orthogonale sur ℓ, alors $p(a;b) = (a;b)$.

b) Pour tout $x \in V$, on peut écrire

$$x = p(x) + (x - p(x)).$$

On note que

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0,$$

donc $x - p(x) \in \ker p$.

On montre que $\ker p \cap \mathrm{Im} p = \{0\}$ comme suit : si $v \in \ker p$, alors $p(v) = 0$ et si $v \in \mathrm{Im}\, p$, alors $v = p(w)$. Donc si $v \in \ker p \cap \mathrm{Im}\, p$, il vient

$$0 = p(v) = p(p(w)) = p(w) = v.$$

On déduit que $V = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$.

c) Dans le cas de la projection orthogonale sur la droite $x = y$, on a que

$$\ker p = \{c(-1;1) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\mathrm{Im} p = \{c(1;1) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 10 (5 points)
Montrons l'affirmation par contradiction. Soient $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de n vecteurs linéairement indépendants de V. Suppose qu'il existe un $0 \neq v \in V$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de B, c'est-à-dire,

$$v \neq a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

pour toute suite $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de K. Alors,

$$0 \neq av + a_1' v_1 + \cdots a_n' v_n$$

pour toute suite $a, a_1', \dots, a_n'$ d'éléments de K, pas tout nul. Ainsi, l'ensemble $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ est une famille de $n+1$ vecteurs linéairement indépendants de V, ce qui est absurde, comme $\dim V = n$. Donc, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de V.

Exercice 11 (5 points)
Soient $\alpha : V \to W$ une application linéaire et $U \subset V$ un sous-espace. Montrons que $\alpha(U)$ est un sous-espace vectoriel à l'aide de notre critère favori.
Comme $\alpha(0) = 0$, on voit que $0 \in \alpha(U)$.
Si $v, w \in U$, alors $\alpha(v), \alpha(w), \alpha(v+w) \in \alpha(U)$, comme U est fermé sous l'addition. Comme $\alpha(v+w) = \alpha(v) + \alpha(w)$, on voit que $\alpha(v) + \alpha(w) \in \alpha(U)$.
Pour $\lambda \in K$ et $v \in U$, on a que $\lambda v \in U$. Comme α est linéaire, $\alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v) \in \alpha(U)$. Donc, $\alpha(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Exercice 12 (5 points)

a) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V. Alors, il n'est pas difficile de voir que

$$(f_i \in \mathcal{L}(V, K) : f_i(e_j) = \delta_{ij})$$

est une base de V^*. Donc, $\dim V^* = n$.

b) Cela suit directement de la première partie, en notant que $\dim \mathbb{R} = \dim \mathbb{R}^* = 1$.

c) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x; y) = x^{1/3} y^{2/3}$$

vérifie

$$f(ax; ay) = af(x; y)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, mais elle n'est pas linéaire.