Corrigé Test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algébriques 15.01.25

Problème 1. *(6 + 2 = 8 points)*

Soit D l'ensemble de toutes les fonctions réelles dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(0) = f'(1)$, muni de la somme et du produit usuels $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

a) Pourquoi D n'est-il pas un anneau commutatif avec la seule condition $f'(0) = f'(1)$? Propositions deux conditions différentes à ajouter pour qu'il le soit.

Comme l'ensemble des fonctions réelles est un anneau commutatif, il faut vérifier que

$$\forall f, g \in D, \quad f+g, \quad f \cdot g \quad \text{et} \quad -f \quad \text{sont dans} \quad D$$

et que la fonction unité $\mathbf{1}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ est dans D.

Comme $\mathbf{1}'(x) = 0$, donc $\mathbf{1}'(0) = \mathbf{1}'(1) = 0$ la fonction unité est bien dans D.

On vérifie que D est fermé pour l'addition. Soient $f, g \in A$. Alors,

$$(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = f'(1) + g'(1) = (f+g)'(1)$$

Par contre, D n'est pas fermé pour la multiplication car en général

$$(f \cdot g)'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \neq f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = (f \cdot g)'(1).$$

Pour obtenir l'égalité $(f \cdot g)'(0) = (f \cdot g)'(1)$, il faut ajouter l'une des deux conditions

$$A.\ f(0) = f(1) \qquad \text{ou alors} \qquad B.\ f'(0) = f'(1) = 0$$

b) Avec l'une des conditions ajoutées, D est-il un corps ? Justifier la réponse

$(D; +; *)$ n'est pas un corps car par exemple, il existe dans D des paires de fonctions non nulles dont le produit est la fonction nulle. Par exemple,

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2(x-1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f \cdot g)(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problème 2. *(5 + 5 + 5 + 5 = 20 points)*

a) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = -2iz - 1 + 2i$

Comme $-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, on a une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et une homothétie de rapport 2, suivies d'une translation de vecteur $(-1; 2)$.

Cherchons les points fixes de la transformation :

$$z = -2iz - 1 + 2i \Leftrightarrow (1+2i)z = -1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+2i} = \frac{(-1+2i)(1-2i)}{5} = \frac{3+4i}{5}.$$

Ainsi, l'homothétie et la rotation sont de centre $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

b) Ecrire l'équation dans $\mathbb{C}$ de la composition de l'homothétie de centre $5 + 3i$ et de rapport 2 suivie de la rotation d'angle π de centre O. Caractériser géométriquement cette similitude.

$f(z) = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))\ (2\,(z - (5+3i)) + (5+3i)) = -(2z - 10 - 6i + 5 + 3i) = -2z + 5 + 3i.$

Point fixe : $\quad z = -2z + 5 + 3i \Leftrightarrow 3z = 5 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{5}{3} + i.$

Il s'agit d'une homothétie de rapport 2 et dune rotation d'angle π de même centre $\left(\frac{5}{3}; 1\right)$.

c) Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du segment reliant $A = (-1; -1)$ et $B = (1; 1)$, privé de l'origine O.

Les points considérés sont décrits par les deux familles $re^{\frac{\pi}{4}i}$ et $re^{-\frac{\pi}{4}i}$ avec $r \in]0; \sqrt{2}]$.

Par application du logarithme, on a $\ln r + i\dfrac{\pi}{4}$ et $\ln r - i\dfrac{\pi}{4}$ avec $r \in]0; \sqrt{2}]$

Cet ensemble de points correspond à deux demi droites horizontales d'ordonnées $y = \pm\dfrac{\pi}{4}$ et d'abscisses couvrant l'intervalle $] - \infty; \ln(\sqrt{2})]$

d) Déterminer la représentation graphique de l'équation $z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) - 5 = 0$.

Si $z = a + bi$, on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2i \cdot 2bi - 5 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4b - 5 = 0 &\Leftrightarrow a^2 + (b+2)^2 - 4 - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b+2)^2 = 9. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $(0; -2)$ et de rayon 3.

Problème 3. *(5 + 2 + 2 + 3 = 12 points)*

On considère $X = \{a, b\}$ l'ensemble constitué de deux éléments a et b.

a) Décrire $\mathcal{P}(X)$ et écrire la table de la loi de composition de la différence symétrique Δ.

$\mathcal{P}(X)) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; X\}$ et la table de la loi de composition Δ est :

Δ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	X
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	X	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	X	$\emptyset$	$\{a\}$
X	X	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

b) En déduire que la Δ admet un élément neutre et donner cet élément neutre.

L'élément neutre est $\emptyset$ car dans la table de composition, la ligne, resp. colonne, d'entrée $\emptyset$ est une copie de la ligne, resp. colonne, des entrées.

Autre démo sans la table : pour tout $A \subset X$, on a $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$.

c) Montrer que tout sous-ensemble $A \subset X$ admet un inverse pour Δ et donner cet inverse.

Tout sous-ensemble A est son propre inverse car la diagonale de la table ne contient que l'élément neutre $\emptyset$.

Autre démo sans la table : $A \subset X$ est l'inverse de lui-même car $A\Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = \emptyset$.

d) Calculer la différence symétrique d'un ensemble A et de son complémentaire $X - A$.

Comme le montre la diagonale montante de la table, $A\Delta(X - A) = X$

Autre démo sans la table : $A\Delta(X - A) = (A \cup (X - A)) - (A \cap (X - A)) = X - \emptyset = X$.

Problème 4. *(8 + 3 = 11 points)*
Un chanteur peu connu a sorti une nouvelle chanson sur une plateforme musicale.
On modélise le nombre d'écoutes quotidiennes N de cette chanson en fonction du nombre de jours x écoulés depuis que la chanson est disponible par :

$$N(x) = x^3 \cdot e^{-0,02\,x} \qquad \text{avec } \ x \geq 1$$

a) Après combien de jours le nombre d'écoutes est-t-il maximal ?
Combien y a-t-il d'écoutes ce jour-là ?

$$\begin{aligned} N'(x) &= 3\,x^2 \cdot e^{-0,02\,x} + x^3 \cdot (-0,02) \cdot e^{-0,02\,x} \;=\; 3\,x^2 \cdot e^{-0,02\,x} - 0,02\,x^3 \cdot e^{-0,02\,x} \\ &= \frac{2}{100}\,x^2\,(150-x) \cdot e^{-0,02\,x} \;=\; \frac{1}{50}\,x^2\,(150-x) \cdot e^{-0,02\,x} \;=\; x^2\,(3-0,02x) \cdot e^{-0,02\,x} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{50}e^{-0,02x} > 0$, on a $N'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(150-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 150$ car $x \geq 1$.

x	$-\infty$	1		150		$+\infty$
$x^2(150-x)$			$+$	0	$-$	
$e^{-0,02x}$			$+$		$+$	
$N'(x)$			$+$	0	$-$	
Croissance de $N(x)$			$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Le nombre d'écoutes est maximal le $150^{\text{ème}}$ jour.

Ce jour-là, il y a $N(150) = 150^3 \cdot e^{-0,02\cdot 150} \cong 3'375'000 \cdot 0,049787 \cong 168'031$ écoutes.
Pour vérifier que $x = 150$, on peut étudier le signe de $N''(x)$:

$$\begin{aligned} N''(x) &= \left(\frac{1}{50}\,x^2\,(150-x) \cdot e^{-0,02\,x}\right)' = \frac{1}{50}\,\left((300x-3x^2) \cdot e^{-0,02\,x} - 0,02\left(150x^2-x^3\right) \cdot e^{-0,02\,x}\right) \\ &= \frac{1}{50}\,e^{-0,02\,x}\,\left(0,02x^3 - 6x^2 + 300x\right) \end{aligned}$$

$N''(150) = \frac{1}{50}\,e^{-0,02\,150}\,(0,02150^3 - 6 \cdot 150^2 + 300 \cdot 150) = \frac{1}{50}\,e^{-0,02\,150}\,(-22500) < 0.$

Ainsi, N est concave en $x = 150$, donc 150 est bien un maximum.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x)$ et interpréter le résultat dans le contexte.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot e^{-0,02x} &\overset{"\infty\cdot 0"}{\overbrace{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{0,02x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to B.H.}{\overbrace{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{0,02 \cdot e^{0,02x}} \\ &\overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to B.H.}{\overbrace{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{0,02^2 \cdot e^{0,02x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to B.H.}{\overbrace{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{0,02^3 \cdot e^{0,02x}} = \frac{6}{+\infty} = 0_+ \end{aligned}$$

A long terme, plus personne n'écoute cette chanson sur la plateforme.

Problème 5. *(4 points)*

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Supposons que $y \neq 0$. Alors l'inverse y^{-1} existe et nous pouvons écrire

$$0 = 0y^{-1} = (xy)y^{-1} = x(yy^{-1}) = x \cdot 1 = x.$$

Problème 6. *(4 + 4 = 8 points)*

Soit V un K-espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

Montrer que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $U \cap W = \{0\}$. Soit $u + w = u' + w' \in U + W$ avec $u, u' \in U$ et $w, w' \in W$. Alors

$$U \ni u - u' = w' - w \in W,$$

et donc, $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$. Ainsi, on a

$$u - u' = 0 \quad \text{et} \quad w' - w = 0,$$

ce qui montre l'unicité de la décomposition de x comme somme d'un élément u de U et d'un élément v de V.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x \in U \cap W$. Alors $x = u + 0$ avec $u \in U$ et $0 \in W$ ou alors $x = 0 + w$ avec $0 \in U$ et $w \in W$.

L'unicité de la décomposition de x implique alors que $u = 0$ et $w = 0$.

Ainsi, $x = 0 + 0 = 0$. Donc $U \cap W = \{0\}$ et $U + W$ est une somme directe.

On peut également procéder par contraposition :

Si $U + W$ n'est pas une somme directe, alors $\exists v \neq 0$ dans $U \cap W$.

La décomposition de v comme somme d'un élément de U et d'un élément de V n'est pas unique car $v = v + 0$ avec $v \in U$ et $0 \in W$ ou alors avec $0 \in U$ et $v \in W$.