

**Exercice 1.**

- a)  $\frac{2x+1}{2(x+2)} - \frac{3x^2}{(x+2)^2} = \frac{(2x+1)(x+2) - 3x^2 \cdot 2}{2(x+2)^2} = \frac{2x^2+5x+2-6x^2}{2(x+2)^2} = \frac{-4x^2+5x+2}{2(x+2)^2}.$
- b)  $\frac{x+4}{x-5} + \frac{3}{5-x} = \frac{x+4}{x-5} - \frac{3}{x-5} = \frac{x+4-3}{x-5} = \frac{x+1}{x-5}.$
- c)  $\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{2(y-x)} = \frac{x}{(x+y)(x-y)} - \frac{x}{(x+y)^2} - \frac{1}{2(x-y)} = \frac{x \cdot 2(x+y) - x \cdot 2(x-y) - (x+y)^2}{2(x+y)^2(x-y)} = \frac{2x^2+2xy-2x^2+2xy-x^2-2xy-y^2}{2(x+y)^2(x-y)} = \frac{-(x^2-2xy+y^2)}{2(x+y)^2(x-y)} = \frac{-(x-y)^2}{2(x+y)^2(x-y)} = \frac{-(x-y)}{2(x+y)^2}.$
- d)  $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+1) + (x+1)^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+x-1+x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^3+3x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{x(x^2+3)}{(x+1)(x^2+1)}.$
- e)  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-2y}{x+y} + \frac{x^2+3y^2}{y^2-x^2} = \frac{(x+y)(x+y) + (x-2y)(x-y) - (x^2+3y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+2xy+y^2+x^2-xy-2xy+2y^2-x^2-3y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2-xy}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x+y}.$
- f)  $\frac{x-3}{x+3} - \frac{4x-6y}{xy+3y+2x+6} + \frac{y+6}{y+2} = \frac{(x-3)(y+2) - (4x-6y) + (y+6)(x+3)}{(x+3)(y+2)} = \frac{xy+2x-3y-6-4x+6y+xy+3y+6x+18}{(x+3)(y+2)} = \frac{2xy+4x+6y+12}{(x+3)(y+2)} = \frac{2(x+3)(y+2)}{(x+3)(y+2)} = 2.$
- g)  $\frac{-3x^4}{(x+1)^4} + \frac{4x^3(x+1)^3}{(x+1)^6} = \frac{-3x^4+4x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-3x^4+4x^4+4x^3}{(x+1)^4} = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}.$
- h)  $\frac{2}{5b} - \frac{4}{3a^3} - \frac{1}{6a^2b^2} = \frac{2 \cdot 6a^3b - 4 \cdot 10b^2 - 1 \cdot 5a}{30a^3b^2} = \frac{12a^3b - 40b^2 - 5a}{30a^3b^2}.$
- i)  $\frac{3x}{3x^2-12x} + \frac{1}{6x} = \frac{6x+(x-4)}{6x(x-4)} = \frac{7x-4}{6x(x-4)}.$
- j)  $\frac{m-1}{m^2-4m+4} + \frac{m+3}{m^2-4} + \frac{2}{2-m} = \frac{(m-1)(m+2) + (m+3)(m-2) - 2(m-2)(m+2)}{(m-2)^2(m+2)} = \frac{m^2-m-2+2m+m^2-2m+3m-6-2m^2+8}{(m-2)^2(m+2)} = \frac{2m}{(m-2)^2(m+2)}.$

**Exercice 2.**

- a)  $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}} = \frac{a^2-b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a^2+2ab+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}.$
- b)  $\frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} = \frac{\frac{2x-2(x+h)}{x(x+h)}}{\frac{1}{h}} = \frac{2x-2x-2h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-2h}{x(x+h)h} = \frac{-2}{x(x+h)}.$
- c)  $\frac{\frac{y-2}{y^2-4y+4}}{y^2+4y+4} = \frac{\frac{y-2}{(y-2)^2}}{(y+2)^2} = \frac{y-2}{(y-2)^2} \cdot \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{(y-2)y}.$
- d)  $\frac{u - \frac{1}{u}}{1 - \frac{1}{u^2}} = \frac{\frac{u^2-1}{u}}{\frac{u^2-1}{u^2}} = \frac{u^2-1}{u} \cdot \frac{u^2}{u^2-1} = u.$
- e)  $\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x}}{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x}} = \frac{x - \frac{1}{x-1}}{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)}} = \frac{x(x-1) - \frac{x}{x-1}}{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{x(x-1) - \frac{x}{x-1}}{2x^2} = \frac{x(x-1)}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+1)}{2x}.$

$$\text{f) } \frac{1 - \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{y}}} = \frac{1 - \frac{1}{\frac{y+x}{y}}}{1 - \frac{1}{\frac{y-x}{y}}} = \frac{\frac{y+x}{y} - \frac{y}{y+x}}{\frac{y-x}{y} - \frac{y}{y-x}} = \frac{x}{y+x} \cdot \frac{y-x}{-x} = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$\text{g) } \frac{\frac{4}{2} - y}{\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4-y^2}{2}}{\frac{4-y^2}{2y^2}} = \frac{4-y^2}{y} \cdot \frac{2y^2}{4-y^2} = 2y.$$

**Exercice 3.** D'une part

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \left( \frac{F(x)}{G(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} \right) = \frac{f(x)}{g(x)} + \left( \frac{F(x)q(x) + p(x)G(x)}{G(x)q(x)} \right) = \frac{f(x)G(x)q(x) + F(x)q(x)g(x) + p(x)G(x)g(x)}{G(x)q(x)g(x)},$$

d'autre part

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)} \right) + \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)G(x) + g(x)F(x)}{g(x)G(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)G(x)q(x) + g(x)F(x)q(x) + p(x)g(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)},$$

comme la multiplication des polynômes est *commutative*, on peut évaluer les deux parties et obtenir le résultat.

**Exercice 4.** D'une part

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left( \frac{F(x)}{G(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} \right) = \frac{f(x)}{g(x)} \left( \frac{F(x)q(x) + p(x)G(x)}{G(x)q(x)} \right) = \frac{f(x)F(x)q(x) + f(x)p(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)},$$

et d'autre part

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{F(x)}{G(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)F(x)q(x) + f(x)p(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)}.$$

On peut ainsi évaluer les deux membres et l'énoncé est démontré.

**Exercice 5.** Vérifions tout d'abord que  $(K(x), +)$  forme un groupe abélien :

- Le fait que l'addition est associative a été vérifié à l'Exercice 3.
- Vérifions que le polynôme nul  $0 \in K(x)$  est l'élément neutre de l'addition :

$$0 + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{1} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 \cdot g(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 + f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)};$$

de même,  $\frac{f(x)}{g(x)} + 0 = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Bien sûr, si l'on montre d'abord la commutativité de l'addition, cette dernière vérification est inutile.

- Toute fraction  $\frac{f(x)}{g(x)}$  possède un inverse  $\frac{-f(x)}{g(x)}$  pour l'addition (c'est-à-dire un opposé) :

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x) + f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = 0;$$

de même,  $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{-f(x)}{g(x)} = 0$ . Ici aussi, si l'on a déjà montré que l'addition est commutative, cette dernière vérification est inutile.

- L'addition est commutative :

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) + p(x)g(x)}{g(x)q(x)}.$$

et

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)g(x) + f(x)q(x)}{q(x)g(x)}.$$

Ces deux fractions sont égales car l'addition *et* la multiplication dans  $K[x]$  sont commutatives.

Vérifions maintenant que  $(K(x) \setminus \{0\}, \cdot)$  forme un groupe abélien :

- La multiplication est associative : on a

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)}{q(x)}\right) \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{f(x)p(x)}{g(x)q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{(f(x)p(x))r(x)}{(g(x)q(x))s(x)}$$

et

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left(\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{f(x)(p(x)r(x))}{g(x)(q(x)s(x))}.$$

Les deux fractions de droite sont égales car la multiplication dans  $K[x]$  est associative.

- Pour simplifier les vérifications de l'élément neutre et de l'inverse multiplicatifs, vérifions que la multiplication est commutative :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)p(x)}{g(x)q(x)} = \frac{p(x)f(x)}{q(x)g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

car la multiplication de polynômes est commutative.

- Vérifions que le polynôme constant  $1 \in K(x)$  est l'élément neutre de la multiplication :

$$1 \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 \cdot f(x)}{1 \cdot g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Par commutativité de la multiplication, on a aussi  $\frac{f(x)}{g(x)} \cdot 1 = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- Toute fraction  $\frac{f(x)}{g(x)}$  possède un inverse  $\frac{g(x)}{f(x)}$  pour la multiplication :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(x)g(x)}{g(x)f(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

et par commutativité de la multiplication,  $\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . Ces égalités sont valables car la multiplication dans  $K[x]$  est commutative.

Finalement, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition a été montrée en partie à l'Exercice 4. L'autre partie (la multiplication d'une somme à droite), découle de la commutativité de la multiplication dans  $K(x)$ .

### Exercice 6.

a) D'une part 
$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}} \cdot \frac{x+y+z}{xy+xz+yz} = \frac{yz+xz+xy}{xyz} \cdot \frac{x+y+z}{xy+xz+yz} =$$

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz} \cdot \frac{xyz}{z+y+x} \cdot \frac{x+y+z}{xy+xz+yz} = 1,$$

et d'autre part 
$$\frac{x+3y+5z}{\frac{5}{xy} + \frac{3}{xz} + \frac{1}{yz}} \cdot \frac{1}{xyz} = \frac{x+3y+5z}{5z+3y+x} \cdot \frac{1}{xyz} = \frac{x+3y+5z}{1} \cdot \frac{xyz}{5z+3y+x} \cdot \frac{1}{xyz} = 1,$$

ainsi l'égalité est démontrée.

b) D'une part 
$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = (x+y+z) \frac{yz+xz+xy}{xyz} = \frac{(x+y+z)(yz+xz+xy)}{xyz} =$$

$$\frac{xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + xy^2 + yz^2 + xz^2 + xyz}{xyz},$$

d'autre part

$$\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} + 1 = \frac{(x+y)(y+z)(x+z) + xyz}{xyz} = \frac{(x+y)(xy+yz+xz+z^2) + xyz}{xyz} =$$

$$\frac{x^2y + xyz + x^2z + xz^2 + xy^2 + y^2z + xyz + yz^2 + xyz}{xyz},$$

en réorganisant les termes des deux côtés, l'égalité est démontrée.

### Exercice 7.

- a) Si  $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$  sont deux représentants de la même fraction rationnelle, alors  $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$  ce qui implique que  $\deg(f_1(x)g_2(x)) = \deg(f_2(x)g_1(x))$ . Comme le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de chacun de ces polynômes, on en déduit que  $\deg(f_1(x)) + \deg(g_2(x)) = \deg(f_2(x)) + \deg(g_1(x))$  et donc que  $\deg(f_1(x)) - \deg(f_2(x)) = \deg(g_1(x)) - \deg(g_2(x))$ . Cette dernière égalité prouve que  $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  et  $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$  ont le même degré.

b) Par définition, le degré de  $\frac{1}{x^n}$  est égal à  $0 - n = -n$ .

c) Montrons que

$$\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)}\right) \leq \max\left(\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{F(x)}{G(x)}\right)$$

et qu'il se peut que l'inégalité soit stricte.

Nous avons

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x)G(x) + F(x)g(x)}{g(x)G(x)}.$$

Alors

$$\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)}\right) = \deg\left(\frac{f(x)G(x) + F(x)g(x)}{g(x)G(x)}\right) = \deg(f(x)G(x) + F(x)g(x)) - \deg(g(x)G(x)).$$

En examinant le premier terme, on voit que l'on cherche le degré d'une somme de polynôme, celui-ci sera plus petit que le maximum des degrés de  $f(x)G(x)$  ou  $F(x)g(x)$ . En effet, si  $f(x)G(x) = a_n x^n + p(x)$  et  $F(x)g(x) = b_m x^m + q(x)$  où  $p(x)$  respectivement  $q(x)$  sont des polynômes de degré plus petit ou égal à  $n - 1$ , respectivement à  $m - 1$ . Alors la somme sera  $a_n x^n + b_m x^m + p(x) + q(x)$ . Ainsi le degré de cette somme sera plus petit ou égal à  $\max(m, n)$ . Remarquons que l'égalité est fautive précisément lorsque  $a_n x^n + b_m x^m = 0$  (c'est-à-dire si  $m = n$  et  $b_m = -a_n$ ), car alors  $f(x)G(x) + F(x)g(x) = p(x) + q(x)$  sera de degré plus petit ou égal à  $n - 1$  (ceci justifie que l'inégalité ci-dessous est stricte dans certains cas). En constatant encore que le degré d'un produit de polynôme est égal à la somme des degrés, on peut écrire

$$\begin{aligned} \deg(f(x)G(x) + F(x)g(x)) - \deg(g(x)G(x)) & \\ & \leq \max(\deg(f(x)) + \deg(G(x)), \deg(F(x)) + \deg(g(x))) - \deg(g(x)) - \deg(G(x)) \\ & = \max(\deg(f(x)) - \deg(g(x)), \deg(F(x)) - \deg(G(x))) \\ & = \max\left(\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right), \deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)\right). \end{aligned}$$

d)  $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{F(x)}{G(x)}\right) = \deg\left(\frac{f(x)F(x)}{g(x)G(x)}\right) = \deg(f(x)F(x)) - \deg(g(x)G(x)) = \deg(f(x)) + \deg(F(x)) - \deg(g(x)) - \deg(G(x)) = \deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right).$

e) Faux. Si  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = x$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x}$  est de degré  $2 - 1 = 1$  mais  $\frac{f(1)}{g(1)} = 2 \neq \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{2}$ , ainsi  $\frac{f(x)}{g(x)}$  n'est pas constante.