Série 18

Exercice 1. Effectue une étude de signe pour les fonctions suivantes, détermine l'ensemble de définition, les asymptotes, les "trous" éventuels, puis esquisse le graphe :

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{(2-x)(x+3)^2}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-2}$;

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-x^3}{3x^2+6x}$.

Explique pourquoi, dans chaque cas, le tableau de la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique n'est pas nécessaire.

$*$ **Exercice 2.** Résous les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{5x^2+2}{x^2-9} > \dfrac{5x-4}{x-3}$;

b) $\dfrac{4x^2+12x+2}{2x^2+3x+4} > 2$;

c) $\dfrac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$;

d) $\dfrac{5}{x^2+5x+6} - \dfrac{2}{x^2-4} \geq \dfrac{3}{x^2-9}$.

$*$ **Exercice 3.** Détermine l'ensemble des nombres réels qui satisfont l'inégalité $(x+1)^2 - |x-2| \geq 0$.

Exercice 4.

a) Détermine le domaine de définition et les asymptotes de la fonction $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$.

b) Détermine le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ et montre qu'elle a une asymptote parabolique.

c) Montre que la droite $y = 4x-3$ est asymptote oblique de la fonction $f(x) = \dfrac{4x^3-3x^2+4x-2}{x^2+1}$.

d) Trouve l'équation de la droite asymptote oblique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$.

Exercice 5. Détermine les réels a, b, c et d pour que le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

respecte les conditions suivantes :

- les droites d'équation $x = 3$ et $y = -2$ sont des asymptotes de f ;
- le graphe de f passe par le point $P = (2; 0)$.

Exercice 6. On considère les 12 fonctions rationnelles $f_1, \ldots, f_{12}$ données comme suit :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_9(x) = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

$$f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)} \qquad f_{10}(x) = 1 + \frac{7}{x^2+4}$$

$$f_3(x) = \frac{2x}{x+1} \qquad f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Détermine de tête, parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	AV	**AH ou AO**		**AV**	**AH ou AO**
a)	$x=-1$	$y=0$	**g)**	$x=-1$	$y=2$
b)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=2$	**h)**	aucune	$y=1$
c)	aucune	$y=2$	**i)**	$x=-1$	$y=-2x+5$
d)	$x=7$	$y=2$	**j)**	$x=7$	$y=0$
e)	$x=-2$ et $x=2$	$y=1$	**k)**	aucune	$y=-2x+5$
f)	$x=5$	$y=-2x+5$	**l)**	$x=-1$ et $x=-10$	$y=0$

Exercice 7. Détermine, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, les asymptotes et/ou "trous" de la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{x^n+3}{x^2-9}$$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions f proposées, détermine :

- l'ensemble de définition, ainsi que le signe de f ;
- les équations des asymptotes, les coordonnées des "trous" éventuels ainsi que la position de la courbe par rapport à l'AO ;
- une bonne esquisse du graphe de f.

a) $f(x) = \dfrac{4x-x^3}{2x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{(x+1)^4}{(x-1)(x^2-1)}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-2)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

Exercice 9. Détermine des fonction rationnelles f et g les plus simples possibles qui pourraient admettre les graphes suivants.