Cours Euler 3ème année

Test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algébriques 17.01.24

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Problème 1. *(15 points)*

a) Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon $r > 0$ centré en l'origine (et privé du point $-r$).

b) Ecrire l'équation dans $\mathbb{C}$ de la composition de l'homothétie de centre $5 + 3i$ et de rapport 2 suivie de la rotation d'angle π.

c) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = (1 + i)\bar{z} + 1 - i$.

Problème 2. *(10 points)*

a) Compléter les tables des lois de composition $+$ et $*$ sachant que $(D; +)$ est un groupe abélien et que la loi * est distributive par rapport à la loi $+$.

+	a	b	c	d
a				
b				
c		d	a	b
d		c	b	

*	a	b	c	d
a				
b		b		
c				a
d		b	c	

b) $(D; +; *)$ est-il un anneau ? Justifier la réponse.

Problème 3. *(12 points)*

On veut construire une maison de base carrée et telle que son volume habitable soit un parallélépipède rectangle de 768 m^3. La perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevée pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher.

a) Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale ?

b) Est-ce réaliste ? Expliquer votre réponse.

Problème 4. *(8 points)*

Dans $\mathbb{Q}$, on définit la loi de composition $*$ par $\quad x * y = x + xy + y$.

a) Montrer que $*$ est une loi de composition dans $\mathbb{Q}$ et qu'elle est associative.

b) Déterminer son élément neutre.

c) Est-ce que $(\mathbb{Q}, *)$ forme un groupe ? Justifier la réponse.

Problème 5. *(3 points)*

On donne $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que tout élément de A possède un symétrique pour $+$.

b) $(A; +; \cdot)$ est-il un corps ? Justifier la réponse.

Problème 6. *(6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Montrer que pour tout $x \in A$,

a) $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$.

b) $(-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1)$.

Problème 7. *(3 points)*

Soit V un K-espace vectoriel et $W \subset V$.
Quelles conditions faut-il vérifier pour prouver que W est un sous-espace vectoriel de V ?

Problème 8. *(6 points)*

Dans chacun des cas suivants, déterminer les conditions sur a et b pour que l'ensemble W soit un sous-espace vectoriel de V.
Justifier vos réponses.

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $W = \{f \in V \mid f(a) = b\}$.

b) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et $W = \{f \in V \mid f(a) = f(b)\}$.