

Base d'un EV : famille génératrice et libre !

## IV. Applications linéaires

Le programme pour aujourd'hui est de continuer la discussion sur les bases d'un espace vectoriel, puis d'étudier les applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure à disposition, c'est-à-dire la somme et l'action.

### 1 Dimension

Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension **finie**, ce qui signifie que  $V$  admet une base finie. Pour pouvoir définir la notion de dimension, nous devons montrer que le nombre de vecteurs qu'il faut pour former une base ne varie pas d'une base à l'autre.

**Proposition 1.1.** *Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension **finie**.*

*Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $V$ , alors  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ .*

*Démonstration.* On a vu la semaine passée que le nombre d'éléments d'une partie libre de  $V$  est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'un système de générateurs.

$\mathcal{B}$  est libre et  $\mathcal{B}'$  est un système de générateurs  $\Rightarrow |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$   
 $\mathcal{B}'$  est libre et  $\mathcal{B}$  est un système de générateurs  $\Rightarrow |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$

Ainsi,  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$

□

La définition suivante a donc un sens.

**Définition 1.2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel.

La *dimension* de  $V$  sur  $K$ , notée  $\dim_K(V)$  ou simplement  $\dim V$ , est le nombre d'éléments que contient une base de  $V$ .

Si  $V$  n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de  $V$  est infinie et alors, par définition, aucune de ses bases n'est finie.

**Exemple 1.3.**

Les espaces vectoriels  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ou celui des suites de nombres complexes sont de dimension infinie. Par contre,  $\dim \mathbb{R}^n = n$  car la base canonique contient exactement  $n$  vecteurs et l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_{23}[x]^{\leq n}$  des polynômes de degré  $\leq n$  à coefficients dans le corps à 23 éléments est de dimension

$n+1$  car  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  en est une base.

Clairement, si  $U$  est un sous-espace de  $V$ ,  $\dim U \leq \dim V$ , puisqu'on peut compléter une base de  $U$  en une base de  $V$ . Ainsi, la dimension d'une somme de sous-espaces est plus grande ou égale à la dimension de chacun d'eux. Mais comment calcule-t-on explicitement cette dimension ?

**Proposition 1.4.** Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $U, W \subset V$  deux sous-espaces de  $V$ . Alors

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

*Démonstration.* Nous devons comparer les tailles des bases des sous-espaces en jeu.

Pour faire cela, commençons par choisir une base  $(v_1, \dots, v_k)$  de l'intersection  $U \cap W$ .  $\Rightarrow \dim(U \cap W) = k$

C'est une famille libre de  $U$  que nous pouvons compléter en une base  $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$  de  $U$ .

De même on construit une base  $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n)$  de  $W$ .  $\Rightarrow \dim W = k+n$   $\Rightarrow \dim U = k+m$

Il suffit de montrer que  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m; w_1, \dots, w_n)$  est une base de  $U + W$ .

Il s'agit d'un système de générateurs car tout élément de  $U + W$  s'écrit  $u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . Puisque  $u$  est combinaison linéaire des éléments  $v_i$  et des  $u_j$  et que  $w$  est combinaison linéaire des  $v_i$  et des  $w_l$ , on voit que  $u + w \in \langle \mathcal{B} \rangle$ . Il reste à voir qu'il s'agit de vecteurs linéairement indépendants. Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0_V \quad (*)$$

où les  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in K$ . On récrit cette équation comme suit :

$$x = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m}_{x \in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n}_{x \in W}$$

Ainsi,  $x \in U \cap W$ , donc  $x = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$

$$\Rightarrow \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0$$

Or,  $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n)$  forment une base de  $W$ , donc une famille libre.

Ainsi  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$  et dans  $(*)$ , il reste  

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$$

Or,  $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$  forment une base de  $U$ , donc une famille libre  $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$   
 $\Rightarrow B$  est libre. C'est bien une base de  $U+W$ .  $\square$

**Exemple 1.5.** Considérons dans  $\mathbb{F}_2[x]^{\leq 3}$  les sous-espaces  $U = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$  et  $W = \mathbb{F}_2[x]^{\leq 2}$ .

- $U$  est constitué des polynômes de la forme  $ax + bx^2 + cx^3$ ,  $a, b, c \in \mathbb{F}_2$   
 $\Rightarrow B_U = (x, x^2, x^3)$  et  $\dim U = 3$ .
- $W$  est constitué des polynômes de la forme  $a + bx + cx^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{F}_2$   
 $\Rightarrow B_W = (1, x, x^2)$  et  $\dim W = 3$
- $\dim(U+W) = 4$  car  $(1, x, x^2, x^3)$  en est une base.
- $\dim(U \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$ . En effet, une base de  $U \cap W$  est  $(x, x^2)$

## 2 La linéarité

Nous avons parlé dans ce module de groupes, d'anneaux, de corps et d'espaces vectoriels, mais nous n'avons pas encore appris à comparer les objets de chacune de ces classes entre eux. Ceci nous amène à la notion d'homomorphisme, du grec *ομοσ*, semblable, et *μορφη*, forme.

**Définition 2.1.** Soient  $(G, *)$  et  $(H, \circ)$  deux groupes.

Un *homomorphisme* de groupes est une application  $f : G \rightarrow H$  telle que  $f(g * g') = f(g) \circ f(g')$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux. Un *homomorphisme* d'anneaux est une application  $f : A \rightarrow B$  telle que  $f(a + a') = f(a) + f(a')$ ,  $f(aa') = f(a)f(a')$  et  $f(1_A) = 1_B$ .

Ainsi, en général, un homomorphisme, ou parfois simplement "morphisme", est une application qui préserve la structure à disposition. Le premier exemple qui vient à l'esprit est l'inclusion d'un sous-anneau. Par exemple, l'inclusion  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  est un homomorphisme d'anneaux (injectif).

**Exemple 2.2.** Considérons l'application de réduction modulo  $p$  qui envoie un entier relatif sur sa classe de congruence modulo  $p$ . Ainsi  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est définie par  $f(n) = [n]$ .

Il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux (surjectif) par définition de la somme et du produit dans les entiers modulo  $p$ .

Il est naturel de définir maintenant un *homomorphisme d'espaces vectoriels* comme étant une application qui préserve la somme et l'action.

**Définition 2.3.** Soient  $K$  un corps,  $V$  et  $W$  deux  $K$ -espaces vectoriels.

Une *application ( $K$ -) linéaire* est une application  $\alpha : V \rightarrow W$  telle que,  $\forall v, v' \in V$  et  $\forall \lambda \in K$ ,

- $\alpha(v + v') = \alpha(v) + \alpha(v')$ ;

- $\alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v)$ .

On note souvent  $\mathcal{L}(V, W)$  l'ensemble de toutes les applications linéaires de  $V$  vers  $W$ .

Lorsque  $V = W$  on abrège en  $\mathcal{L}(V)$ .

On appelle *isomorphisme* une application linéaire **bijective**.

En particulier, on voit que  $\alpha(0_V) = 0_W$ , car

$$\alpha(0_V) = \alpha(0 \cdot v) \stackrel{\lambda=0 \text{ dans } (*)}{=} 0 \alpha(v) = 0_W$$

De nouveau, les exemples évidents qui nous viennent à l'esprit sont les inclusions de sous-espaces vectoriels, mais nous montrerons que des transformations du plan comme les rotations, symétries, homothéties et projections orthogonales sont des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même.

**Proposition 2.4.** Soit  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire,  $U \subset V$  et  $Z \subset W$  des sous-espaces. Alors  $\alpha(U)$  est un sous-espace de  $W$  et  $\alpha^{-1}(Z)$  est un sous-espace de  $V$ .

*Démonstration.* La première affirmation se fera en exercice.

Montrons simplement la deuxième affirmation à l'aide de notre critère favori.

- $\alpha(0_V) = 0_W$  donc  $0_V \in \alpha^{-1}(Z)$ .  $Z$  est donc non-vide!
- $v, v' \in \alpha^{-1}(Z) \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \alpha(v)$  et  $\alpha(v') \in Z$ .  
De plus,  $\alpha(v) + \alpha(v') \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(v+v') \in Z \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} v+v' \in \alpha^{-1}(Z)$
- Si  $v \in \alpha^{-1}(Z)$  et  $\lambda \in K \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \alpha(v) \in Z \stackrel{Z:EV}{\Rightarrow} \lambda \alpha(v) \in Z$   
 $\stackrel{\alpha \text{ lin}}{\Rightarrow} \alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v) \in Z \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \lambda v \in \alpha^{-1}(Z)$ . □

**Exemple 2.5.** Considérons les espaces vectoriels  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathbb{C}^4$ .

Un exemple d'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\alpha : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$  est donné par

$$\alpha(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2; z_2 + z_3; 0; 3z_1 + 2z_3)$$

Chacune des composantes de l'image est une comb. lin de  $z_1, z_2, z_3$ .

**Exemple 2.6.** L'application  $\beta : \mathbb{F}_7^3 \rightarrow \mathbb{F}_7$  définie par  $\beta(a, b, c) = a + b - 3c + 1$  n'est pas linéaire

car  $\beta(0; 0; 0) = 1 \neq 0$ .

### 3 Noyau, image et rang

Etant donné une application linéaire, deux sous-espaces importants nous aident à comprendre la signification géométrique de cette application.

**Définition 3.1.** Soit  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire.

Le **noyau** de  $\alpha$ , noté  $\text{Ker}(\alpha)$ , est le sous-espace  $\alpha^{-1}(0) = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ .

L'**image** de  $\alpha$ , notée  $\text{Im}(\alpha)$ , est le sous-espace  $\alpha(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } \alpha(v) = w\}$ .

Le **rang** de  $\alpha$  est la **dimension de  $\text{Im}(\alpha)$** .

**Exemple 3.2.** Considérons l'application linéaire  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\alpha(x; y) = \left(\frac{x-y}{2}; \frac{y-x}{2}\right)$ .

Calculons le noyau et l'image de cette application linéaire du plan.

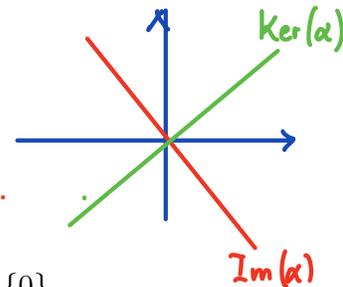
•  $\text{Ker}(\alpha) : \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y \Rightarrow \text{Ker}(\alpha) = \{(x;y) \mid x=y\} = \langle (1;1) \rangle$

$\text{Ker}(\alpha)$  est un SEV de  $\mathbb{R}^2$  de dimension 1.

•  $\text{Im}(\alpha) : (u, v)$  t.q.  $\exists x, y$  avec  $\begin{cases} u = \frac{x-y}{2} \\ v = \frac{y-x}{2} \end{cases} \begin{matrix} | \\ | \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$   $u+v=0 \Leftrightarrow u=-v$

$\text{Im}(\alpha) = \{(u; v) \mid u=-v\} = \langle (1; -1) \rangle$

En fait,  $\alpha$  est la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  sur la droite d'éq.  $x=-y$ .



**Proposition 3.3.**

Une application linéaire est injective si et seulement son noyau est le sous-espace  $\{0\}$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha : V \rightarrow W$  est injective, alors le seul vecteur dont l'image est  $0_W$  doit être  $0_V$ , si bien que  $\text{Ker}(\alpha) = \{0\}$ .

Réciproquement, si le noyau est nul, montrons que  $\alpha$  est injective.

Soient  $v$  et  $v' \in V$  tels que  $\alpha(v) \stackrel{(*)}{=} \alpha(v')$

$\Rightarrow \alpha(v-v') \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(v) - \alpha(v') \stackrel{(*)}{=} 0_W \Rightarrow v-v' \in \text{Ker}(\alpha) \stackrel{\text{hyp}}{=} \{0_V\}$

$\Rightarrow v-v' = 0_V \Leftrightarrow v=v'$  donc  $\alpha$  est injective.

□

Le théorème du rang explique la relation très forte qui existe entre les dimensions des sous-espaces vectoriels en jeu, celle du noyau et celle de l'image.

**Théorème 3.4. du rang.**

Soit  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire et supposons que  $V$  est de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim(\ker \alpha) + \text{rang}(\alpha)$$

$k \quad + \quad n$

*Démonstration.* Puisque  $V$  est de dimension finie, le sous-espace  $\text{Ker}(\alpha)$  aussi. Choisissons une base  $(v_1, \dots, v_k)$  du noyau et complétons-la en une base de  $V$  tout entier,  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n)$ . Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que l'image de  $\alpha$  est un sous-espace de dimension  $n$ .

Considérons donc les vecteurs  $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$  de l'espace vectoriel  $W$ . Nous allons montrer qu'ils forment une base de  $\text{Im}(\alpha)$ .

En effet, si  $w \in \text{Im}(\alpha)$ , il existe  $v \in V$  tel que  $\alpha(v) = w$ . Écrivons ce vecteur  $v$  comme combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_V$  que nous avons construite :

$$\begin{aligned} w &= \alpha(v) = \alpha(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n) \\ &\stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \lambda_1 \alpha(v_1) + \dots + \lambda_k \alpha(v_k) + \mu_1 \alpha(u_1) + \dots + \mu_n \alpha(u_n) \end{aligned}$$

$= 0_w \quad \quad \quad 0_w$

où les coefficients  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont dans  $K$ . Ainsi,  $w$  est bien combinaison linéaire de vecteurs  $\alpha(u_j)$ . Il reste encore à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$0_W = \gamma_1 \alpha(u_1) + \dots + \gamma_n \alpha(u_n) \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n).$$

Ainsi, le vecteur  $\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n$  appartient à  $\text{Ker}(\alpha)$ .

$$\Rightarrow \exists \text{ coefficients } \delta_i \in K \text{ t.q. } \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n - \delta_1 v_1 - \dots - \delta_k v_k = 0_V$$

et comme  $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k) = \mathcal{B}_V$ ,  $\gamma_i = 0 \forall i$  et  $\delta_j = 0, \forall j$

Ainsi  $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$  forment une famille libre en plus de générer  $\text{Im}(\alpha)$ . C'est donc une base de  $\text{Im}(\alpha)$ . □

**Corollaire 3.5.** Soit  $V$  et  $W$  des  $K$ -espaces vectoriels.

Alors, si  $\dim V < \dim W$ , il n'existe aucune application linéaire surjective  $\alpha : V \rightarrow W$ .

**Corollaire 3.6.** Soit  $V$  et  $W$  des  $K$ -espaces vectoriels et  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire.

Alors, si  $\text{rang}(\alpha) = \dim W$ ,  $\alpha$  est surjective.

**Corollaire 3.7.** Soit  $V$  et  $W$  des  $K$ -espaces vectoriels de même dimension, finie.

Alors une applicatin linéaire  $\alpha : V \rightarrow W$  est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective.

Démonstration.

Le théorème du rang nous dit que  $\alpha$  est injective si et seulement si  $\dim \text{Im}(\alpha) = \dim V$ .

Puisque  $\dim V = \dim W$  ceci arrive exactement lorsque  $\alpha$  est surjective. □

**Exemple 3.8.** Soit  $\alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $\mathbb{C}$ -linéaire.

Elle est donc de la forme  $\alpha(z, z') = az + bz'$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Lesquelles de ces applications sont surjectives, injectives, bijectives?

Thm du rang :  $(a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$   
 $2 = \dim(\mathbb{C}^2) = \dim \mathbb{C} + \dim \text{Ker}(\alpha)$

•  $a = b = 0$ ,  $\alpha$  est l'application nulle.  $\text{Ker}(\alpha) = \mathbb{C}^2 \neq \{(0; 0)\}$   
 $\Rightarrow \alpha$  n'est ni injective, ni surjective.

• Sinon :  $\text{rang}(\alpha) > 0$  et  $\text{rang}(\alpha) \leq 1 = \dim \mathbb{C}$   
 donc  $\text{rang}(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha$  est surjective.  
 Thm rang  $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(\alpha)) = 1 \Rightarrow \alpha$  n'est pas injective.

• Dans tous les cas,  $\alpha$  n'est jamais bijective.

## 4 La matrice d'une application linéaire

Nous travaillons dans cette section avec deux  $K$ -espaces vectoriels  $V$  et  $W$  de dimensions finies, disons  $m$  et  $n$  respectivement. Nous aimerions mieux comprendre l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires  $\alpha : V \rightarrow W$ . Combien y en a-t-il? Comment les représenter et travailler avec? A quoi correspondent-elles dans la pratique?

**Définition 4.1.** Une matrice  $n \times m$  à coefficients dans  $K$  est un tableau, entouré de parenthèses, de  $n$  lignes et  $m$  colonnes dans lequel toutes les entrées sont des scalaires (de  $K$ ) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}} \right\} n \text{ lignes}$$

$1^{\text{er}}$  indice  $\rightarrow n^{\text{o}}$  ligne  
 $2^{\text{e}}$  indice  $\rightarrow m^{\text{o}}$  colonne.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ colonnes}}$

On note  $M_{n \times m}(K)$  l'ensemble de toutes ces matrices.

On additionne les matrices de même taille coefficient par coefficient, si bien que  $M_{n \times m}(K)$  est un groupe abélien. On le munit d'une action de  $K$ , coefficient par coefficient, qui en fait  $K$ -espace vectoriel.

**Proposition 4.2.** *L'espace vectoriel  $M_{n \times m}(K)$  est de dimension  $n \cdot m$ .*

*Démonstration.* La base canonique de  $M_{n \times m}(K)$  est formée des matrices  $e_{ij}$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$  dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne qui vaut  $1_K$ . □

**Définition 4.3.** Soit  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire.

On fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$  de  $V$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $W$ . ( $\dim V = m$  et  $\dim W = n$ )

Soient  $a_{ij}$  les coefficients dans  $K$  des combinaisons linéaires, uniques,  $\alpha(e_j) = \sum a_{ij} f_i$ . (tels que  $= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ )

Alors la matrice  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$  est la matrice de  $\alpha$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

Cette définition permet de construire une application  $T : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(K)$ .

**Théorème 4.4.** *L'application  $T : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(K)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,  $\dim \mathcal{L}(V, W) = n \cdot m$ .*

*Démonstration.* Voyons d'abord pourquoi l'application  $T$  est linéaire.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux applications linéaires, alors  $(\alpha + \beta)(e_i) = \alpha(e_i) + \beta(e_i)$ , si bien que les coefficients de la matrice de  $\alpha + \beta$  sont la somme de ceux des matrices de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

De même,  $T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha)$  pour tout  $\lambda \in K$ .

De plus, l'application linéaire  $T$  est injective, car si  $T(\alpha)$  est la matrice nulle, alors  $\alpha$  est l'application nulle !

Enfin,  $T$  est aussi surjective car à toute matrice  $(a_{ij})_{n \times m}$ , on peut faire correspondre une application  $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$  définie comme suit :

$$\forall v \in V, v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \quad \text{car } \mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m) \text{ est une base de } V$$

$$\text{On pose } \alpha(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ij} f_i.$$

Ainsi, les composantes de  $\alpha(v)$  dans la base  $\mathcal{C}$  sont les éléments de la matrice colonne  $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$  par définition du produit matriciel et  $\alpha$  est clairement linéaire. □

Ainsi, une fois qu'on s'est fixé une base  $\mathcal{B}_V$  de l'espace vectoriel de départ  $V$  et une base  $\mathcal{B}_W$  de l'espace vectoriel d'arrivée  $W$ , la matrice d'une application se construit en plaçant dans les colonnes les composantes des images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_V$  relativement à la base  $\mathcal{B}_W$ .

Réciproquement, pour calculer l'image d'un vecteur  $v \in V$  par une application linéaire dont on nous donne seulement la matrice, il faut exprimer le vecteur  $v$  comme combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m)$ , écrire ses composantes dans un vecteur colonne et multiplier ce vecteur à droite par  $A$  pour obtenir les composantes de  $\alpha(v)$  relativement à  $\mathcal{B}_W = (f_1, \dots, f_n)$  :

$$v = \sum \lambda_j e_j \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} \lambda_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha(v) = \sum \mu f_i$$

**Exemple 4.5.** Soit  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire donnée par la matrice  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Alors l'image du point  $(1; 1)$  est donné par

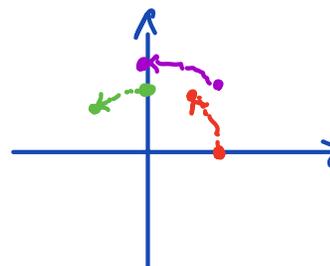
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de  $e_1 = (1; 0)$  est

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de  $e_2 = (0; 1)$  est

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Géométriquement,  $A$  est la matrice de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de centre  $O$ .