

Base d'un EV : famille génératrice et libre !

IV. Applications linéaires

Le programme pour aujourd'hui est de continuer la discussion sur les bases d'un espace vectoriel, puis d'étudier les applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure à disposition, c'est-à-dire la somme et l'action.

1 Dimension

Soit K un corps et V un K -espace vectoriel de dimension **finie**, ce qui signifie que V admet une base finie. Pour pouvoir définir la notion de dimension, nous devons montrer que le nombre de vecteurs qu'il faut pour former une base ne varie pas d'une base à l'autre.

Proposition 1.1. Soit V un K -espace vectoriel de dimension **finie**.

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de V , alors $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Démonstration. On a vu la semaine passée que le nombre d'éléments d'une partie libre de V est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'un système de générateurs.

\mathcal{B} est libre et \mathcal{B}' est un système de générateurs $\Rightarrow |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$
 \mathcal{B}' est libre et \mathcal{B} est un système de générateurs $\Rightarrow |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$

Ainsi, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$

□

La définition suivante a donc un sens.

Définition 1.2. Soit V un K -espace vectoriel.

La *dimension* de V sur K , notée $\dim_K(V)$ ou simplement $\dim V$, est le nombre d'éléments que contient une base de V .

Si V n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de V est infinie et alors, par définition, aucune de ses bases n'est finie.

Exemple 1.3.

Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou celui des suites de nombres complexes sont de dimension infinie. Par contre, $\dim \mathbb{R}^n = n$ car la base canonique contient exactement n vecteurs et l'espace vectoriel $\mathbb{F}_{23}[x]^{\leq n}$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans le corps à 23 éléments est de dimension

$n+1$ car $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ en est une base.

Clairement, si U est un sous-espace de V , $\dim U \leq \dim V$, puisqu'on peut compléter une base de U en une base de V . Ainsi, la dimension d'une somme de sous-espaces est plus grande ou égale à la dimension de chacun d'eux. Mais comment calcule-t-on explicitement cette dimension ?

Proposition 1.4. Soient V un K -espace vectoriel et $U, W \subset V$ deux sous-espaces de V . Alors

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Démonstration. Nous devons comparer les tailles des bases des sous-espaces en jeu.

Pour faire cela, commençons par choisir une base (v_1, \dots, v_k) de l'intersection $U \cap W$. $\Rightarrow \dim(U \cap W) = k$

C'est une famille libre de U que nous pouvons compléter en une base $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$ de U .

De même on construit une base $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n)$ de W . $\Rightarrow \dim W = k+n$ $\Rightarrow \dim U = k+m$

Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m; w_1, \dots, w_n)$ est une base de $U + W$.

Il s'agit d'un système de générateurs car tout élément de $U + W$ s'écrit $u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$. Puisque u est combinaison linéaire des éléments v_i et des u_j et que w est combinaison linéaire des v_i et des w_l , on voit que $u+w \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Il reste à voir qu'il s'agit de vecteurs linéairement indépendants. Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0_V \quad (*)$$

où les $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in K$. On récrit cette équation comme suit :

$$x = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m}_{x \in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n}_{x \in W}$$

Ainsi, $x \in U \cap W$, donc $x = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$

$$\Rightarrow \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0$$

Or, $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n)$ forment une base de W , donc une famille libre.

Ainsi $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$ et dans $(*)$, il reste

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$$
Or, $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$ forment une base de U , donc une famille libre $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$
 $\Rightarrow B$ est libre. C'est bien une base de $U+W$. \square

Exemple 1.5. Considérons dans $\mathbb{F}_2[x]^{\leq 3}$ les sous-espaces $U = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$ et $W = \mathbb{F}_2[x]^{\leq 2}$.

- U est constitué des polynômes de la forme $ax + bx^2 + cx^3$, $a, b, c \in \mathbb{F}_2$
 $\Rightarrow B_U = (x, x^2, x^3)$ et $\dim U = 3$.
- W est constitué des polynômes de la forme $a + bx + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{F}_2$
 $\Rightarrow B_W = (1, x, x^2)$ et $\dim W = 3$
- $\dim(U+W) = 4$ car $(1, x, x^2, x^3)$ en est une base.
- $\dim(U \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$. En effet, une base de $U \cap W$ est (x, x^2)

2 La linéarité

Nous avons parlé dans ce module de groupes, d'anneaux, de corps et d'espaces vectoriels, mais nous n'avons pas encore appris à comparer les objets de chacune de ces classes entre eux. Ceci nous amène à la notion d'homomorphisme, du grec *ομοσ*, semblable, et *μορφη*, forme.

Définition 2.1. Soient $(G, *)$ et (H, \circ) deux groupes.

Un *homomorphisme* de groupes est une application $f : G \rightarrow H$ telle que $f(g * g') = f(g) \circ f(g')$.

Soient A et B deux anneaux. Un *homomorphisme* d'anneaux est une application $f : A \rightarrow B$ telle que $f(a + a') = f(a) + f(a')$, $f(aa') = f(a)f(a')$ et $f(1_A) = 1_B$.

Ainsi, en général, un homomorphisme, ou parfois simplement "morphisme", est une application qui préserve la structure à disposition. Le premier exemple qui vient à l'esprit est l'inclusion d'un sous-anneau. Par exemple, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneaux (injectif).

Exemple 2.2. Considérons l'application de réduction modulo p qui envoie un entier relatif sur sa classe de congruence modulo p . Ainsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est définie par $f(n) = [n]$.

Il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux (surjectif) par définition de la somme et du produit dans les entiers modulo p .

Il est naturel de définir maintenant un *homomorphisme d'espaces vectoriels* comme étant une application qui préserve la somme et l'action.

Définition 2.3. Soient K un corps, V et W deux K -espaces vectoriels.

Une *application (K -) linéaire* est une application $\alpha : V \rightarrow W$ telle que, $\forall v, v' \in V$ et $\forall \lambda \in K$,

- $\alpha(v + v') = \alpha(v) + \alpha(v')$;

- $\alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v)$.

On note souvent $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de V vers W .

Lorsque $V = W$ on abrège en $\mathcal{L}(V)$.

On appelle *isomorphisme* une application linéaire **bijective**.

En particulier, on voit que $\alpha(0_V) = 0_W$, car

$$\alpha(0_V) = \alpha(0 \cdot v) \stackrel{\lambda=0 \text{ dans } (*)}{=} 0 \alpha(v) = 0_W$$

De nouveau, les exemples évidents qui nous viennent à l'esprit sont les inclusions de sous-espaces vectoriels, mais nous montrerons que des transformations du plan comme les rotations, symétries, homothéties et projections orthogonales sont des applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

Proposition 2.4. Soit $\alpha : V \rightarrow W$ une application linéaire, $U \subset V$ et $Z \subset W$ des sous-espaces. Alors $\alpha(U)$ est un sous-espace de W et $\alpha^{-1}(Z)$ est un sous-espace de V .

Démonstration. La première affirmation se fera en exercice.

Montrons simplement la deuxième affirmation à l'aide de notre critère favori.

- $\alpha(0_V) = 0_W$ donc $0_V \in \alpha^{-1}(Z)$. Z est donc non-vide!
- $v, v' \in \alpha^{-1}(Z) \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \alpha(v)$ et $\alpha(v') \in Z$.
De plus, $\alpha(v) + \alpha(v') \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(v+v') \in Z \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} v+v' \in \alpha^{-1}(Z)$
- Si $v \in \alpha^{-1}(Z)$ et $\lambda \in K \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \alpha(v) \in Z \stackrel{Z:EV}{\Rightarrow} \lambda \alpha(v) \in Z$
 $\stackrel{\alpha \text{ lin}}{\Rightarrow} \alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v) \in Z \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} \lambda v \in \alpha^{-1}(Z)$. □

Exemple 2.5. Considérons les espaces vectoriels \mathbb{C}^3 et \mathbb{C}^4 .

Un exemple d'application \mathbb{C} -linéaire $\alpha : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ est donné par

$$\alpha(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2; z_2 + z_3; 0; 3z_1 + 2z_3)$$

Chacune des composantes de l'image est une comb. lin de z_1, z_2, z_3 .

Exemple 2.6. L'application $\beta : \mathbb{F}_7^3 \rightarrow \mathbb{F}_7$ définie par $\beta(a, b, c) = a + b - 3c + 1$ n'est pas linéaire

car $\beta(0; 0; 0) = 1 \neq 0$.

3 Noyau, image et rang

Etant donné une application linéaire, deux sous-espaces importants nous aident à comprendre la signification géométrique de cette application.

Définition 3.1. Soit $\alpha : V \rightarrow W$ une application linéaire.

Le **noyau** de α , noté $\text{Ker}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha^{-1}(0) = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$.

L'**image** de α , notée $\text{Im}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } \alpha(v) = w\}$.

Le **rang** de α est la **dimension de $\text{Im}(\alpha)$** .

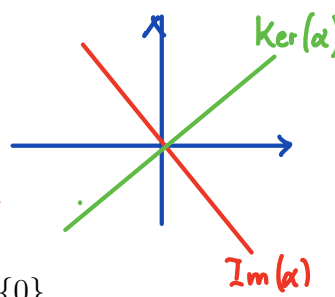
Exemple 3.2. Considérons l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha(x; y) = \left(\frac{x-y}{2}; \frac{y-x}{2}\right)$.

Calculons le noyau et l'image de cette application linéaire du plan.

• $\text{Ker}(\alpha) : \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y \Rightarrow \text{Ker}(\alpha) = \{(x;y) \mid x=y\} = \langle (1;1) \rangle$
 $\text{Ker}(\alpha)$ est un SEV de \mathbb{R}^2 de dimension 1.

• $\text{Im}(\alpha) : (u,v)$ t.q. $\exists x,y$ avec $\begin{cases} u = \frac{x-y}{2} \\ v = \frac{y-x}{2} \end{cases} \begin{matrix} | \\ | \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ $u+v=0 \Leftrightarrow u=-v$
 $\text{Im}(\alpha) = \{(u,v) \mid u=-v\} = \langle (1;-1) \rangle$

En fait, α est la projection orthogonale de \mathbb{R}^2 sur la droite d'éq. $x=-y$.



Proposition 3.3.

Une application linéaire est injective si et seulement son noyau est le sous-espace $\{0\}$.

Démonstration. Si $\alpha : V \rightarrow W$ est injective, alors le seul vecteur dont l'image est 0_W doit être 0_V , si bien que $\text{Ker}(\alpha) = \{0\}$.

Réciproquement, si le noyau est nul, montrons que α est injective.

Soient v et $v' \in V$ tels que $\alpha(v) \stackrel{(*)}{=} \alpha(v')$
 $\Rightarrow \alpha(v-v') \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(v) - \alpha(v') \stackrel{(*)}{=} 0_W \Rightarrow v-v' \in \text{Ker}(\alpha) \stackrel{\text{hyp}}{=} \{0_V\}$
 $\Rightarrow v-v' = 0_V \Leftrightarrow v=v'$ donc α est injective.

□

Le théorème du rang explique la relation très forte qui existe entre les dimensions des sous-espaces vectoriels en jeu, celle du noyau et celle de l'image.

Théorème 3.4. du rang.

Soit $\alpha : V \rightarrow W$ une application linéaire et supposons que V est de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim(\ker \alpha) + \text{rang}(\alpha)$$

$k \quad + \quad n$

Démonstration. Puisque V est de dimension finie, le sous-espace $\text{Ker}(\alpha)$ aussi. Choisissons une base (v_1, \dots, v_k) du noyau et complétons-la en une base de V tout entier, $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n)$. Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que l'image de α est un sous-espace de dimension n .

Considérons donc les vecteurs $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$ de l'espace vectoriel W . Nous allons montrer qu'ils forment une base de $\text{Im}(\alpha)$.

En effet, si $w \in \text{Im}(\alpha)$, il existe $v \in V$ tel que $\alpha(v) = w$. Ecrivons ce vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base \mathcal{B}_V que nous avons construite :

$$w = \alpha(v) = \alpha(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n)$$

$$\stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \lambda_1 \alpha(v_1) + \dots + \lambda_k \alpha(v_k) + \mu_1 \alpha(u_1) + \dots + \mu_n \alpha(u_n)$$

$= 0_w \quad \quad \quad 0_w$

où les coefficients λ_i et μ_j sont dans K . Ainsi, w est bien combinaison linéaire de vecteurs $\alpha(u_j)$. Il reste encore à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$0_W = \gamma_1 \alpha(u_1) + \dots + \gamma_n \alpha(u_n) \stackrel{\alpha \text{ lin}}{=} \alpha(\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n)$$

Ainsi, le vecteur $\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n$ appartient à $\text{Ker}(\alpha)$.

$$\Rightarrow \exists \text{ coefficients } \delta_i \in K \text{ t.q. } \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n - \delta_1 v_1 - \dots - \delta_k v_k = 0_V$$

et comme $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k) = \mathcal{B}_V$, $\gamma_i = 0 \forall i$ et $\delta_j = 0, \forall j$

Ainsi $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$ forment une famille libre en plus de générer $\text{Im}(\alpha)$. C'est donc une base de $\text{Im}(\alpha)$. □

Corollaire 3.5. Soit V et W des K -espaces vectoriels.

Alors, si $\dim V < \dim W$, il n'existe aucune application linéaire surjective $\alpha : V \rightarrow W$.

Corollaire 3.6. Soit V et W des K -espaces vectoriels et $\alpha : V \rightarrow W$ une applicatin linéaire.

Alors, si $\text{rang}(\alpha) = \dim W$, α est surjective.

Corollaire 3.7. Soit V et W des K -espaces vectoriels de même dimension, finie.

Alors une applicatin linéaire $\alpha : V \rightarrow W$ est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective.

Démonstration.

Le théorème du rang nous dit que α est injective si et seulement si $\dim \text{Im}(\alpha) = \dim V$.

Puisque $\dim V = \dim W$ ceci arrive exactement lorsque α est surjective. □

Exemple 3.8. Soit $\alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{C} -linéaire.

Elle est donc de la forme $\alpha(z, z') = az + bz'$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Lesquelles de ces applications sont surjectives, injectives, bijectives?

Thm du rang : $(a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$
 $2 = \dim(\mathbb{C}^2) = \dim \mathbb{C} + \dim \text{Ker}(\alpha)$

• $a = b = 0$, α est l'application nulle. $\text{Ker}(\alpha) = \mathbb{C}^2 \neq \{(0; 0)\}$
 $\Rightarrow \alpha$ n'est ni injective, ni surjective.

• Sinon : $\text{rang}(\alpha) > 0$ et $\text{rang}(\alpha) \leq 1 = \dim \mathbb{C}$
 donc $\text{rang}(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha$ est surjective.
 Thm rang $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(\alpha)) = 1 \Rightarrow \alpha$ n'est pas injective.

• Dans tous les cas, α n'est jamais bijective.

4 La matrice d'une application linéaire

Nous travaillons dans cette section avec deux K -espaces vectoriels V et W de dimensions finies, disons m et n respectivement. Nous aimerions mieux comprendre l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\alpha : V \rightarrow W$. Combien y en a-t-il? Comment les représenter et travailler avec? A quoi correspondent-elles dans la pratique?

Définition 4.1. Une matrice $n \times m$ à coefficients dans K est un tableau, entouré de parenthèses, de n lignes et m colonnes dans lequel toutes les entrées sont des scalaires (de K) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}} \right\} n \text{ lignes}$$

1^{er} indice $\rightarrow n^{\text{o}}$ ligne
 2^{e} indice $\rightarrow m^{\text{o}}$ colonne.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ colonnes}}$

On note $M_{n \times m}(K)$ l'ensemble de toutes ces matrices.

On additionne les matrices de même taille coefficient par coefficient, si bien que $M_{n \times m}(K)$ est un groupe abélien. On le munit d'une action de K , coefficient par coefficient, qui en fait K -espace vectoriel.

Proposition 4.2. *L'espace vectoriel $M_{n \times m}(K)$ est de dimension $n \cdot m$.*

Démonstration. La base canonique de $M_{n \times m}(K)$ est formée des matrices e_{ij} avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1_K . □

Définition 4.3. Soit $\alpha : V \rightarrow W$ une application linéaire.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de V et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de W . ($\dim V = m$ et $\dim W = n$)

Soient a_{ij} les coefficients dans K des combinaisons linéaires, uniques, $\alpha(e_j) = \sum a_{ij} f_i$. (tels que $= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$)

Alors la matrice $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ est la matrice de α dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .

Cette définition permet de construire une application $T : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(K)$.

Théorème 4.4. *L'application $T : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(K)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim \mathcal{L}(V, W) = n \cdot m$.*

Démonstration. Voyons d'abord pourquoi l'application T est linéaire.

Si α et β sont deux applications linéaires, alors $(\alpha + \beta)(e_i) = \alpha(e_i) + \beta(e_i)$, si bien que les coefficients de la matrice de $\alpha + \beta$ sont la somme de ceux des matrices de α et de β .

De même, $T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha)$ pour tout $\lambda \in K$.

De plus, l'application linéaire T est injective, car si $T(\alpha)$ est la matrice nulle, alors α est l'application nulle !

Enfin, T est aussi surjective car à toute matrice $(a_{ij})_{n \times m}$, on peut faire correspondre une application $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$ définie comme suit :

$$\forall v \in V, v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \quad \text{car } \mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m) \text{ est une base de } V$$

$$\text{On pose } \alpha(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ij} f_i.$$

Ainsi, les composantes de $\alpha(v)$ dans la base \mathcal{C} sont les éléments de la matrice colonne $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ par définition du produit matriciel et α est clairement linéaire. □

Ainsi, une fois qu'on s'est fixé une base \mathcal{B}_V de l'espace vectoriel de départ V et une base \mathcal{B}_W de l'espace vectoriel d'arrivée W , la matrice d'une application se construit en plaçant dans les colonnes les composantes des images des vecteurs de la base \mathcal{B}_V relativement à la base \mathcal{B}_W .

Réciproquement, pour calculer l'image d'un vecteur $v \in V$ par une application linéaire dont on nous donne seulement la matrice, il faut exprimer le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m)$, écrire ses composantes dans un vecteur colonne et multiplier ce vecteur à droite par A pour obtenir les composantes de $\alpha(v)$ relativement à $\mathcal{B}_W = (f_1, \dots, f_n)$:

$$v = \sum \lambda_j e_j \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} \lambda_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha(v) = \sum \mu f_i$$

Exemple 4.5. Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Alors l'image du point $(1; 1)$ est donné par

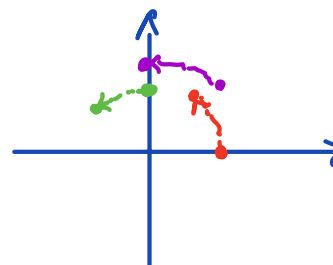
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de $e_1 = (1; 0)$ est

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de $e_2 = (0; 1)$ est

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Géométriquement, A est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre O .