Corrigé série 11

Exercice 1 (5 points)

a) $e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + -i = -i$

b) $\sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}} = \sqrt{2}i\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}ii = -\sqrt{2}$

c) $\dfrac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i} = \dfrac{2\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2}$

d) $\dfrac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}} = \dfrac{i}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Exercice 2 (5 points)

a) $e^{1+i} = ee^i = e(\cos(1) + i\sin(1))$. Ainsi le module est e et l'argument 1.

b) $e^{e^i} = e^{\cos(1)+i\sin(1)} = e^{\cos(1)}e^{i\sin(1)} = e^{\cos(1)}\left(\cos\sin(1) + i\sin\sin(1)\right)$. Le module est $e^{\cos(1)}$ et l'argument $\sin(1)$.

c) $e^{e^{\pi i}} = e^{-1}$. Le module est e^{-1} et l'argument est zéro.

d) $e^{-2i} = \cos(-2) + i\sin(-2)$. Le module est 1 et l'argument est -2.

Exercice 3 (10 points)

a) **Vrai**. Cela découle des définitions.

b) **Faux**. Il découle de la périodicité des fonctions trigonométriques que

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}, \qquad \text{pour tout} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

c) **Vrai**. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On veut prouver qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$a + bi = e^{x+yi}.$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} e^x\cos(y) = a \\ e^x\sin(y) = b \end{cases}$$

Dans le cas où a ou b est zéro, on arrive facilement à trouver une solution. Supposons que $a, b \neq 0$. Alors, on définit

$$y = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad x = \ln\left(\frac{a}{\cos(y)}\right),$$

Ici, y est, *a priori*, dans $]-\pi/2, \pi/2[$, mais on "le décale" si besoin de π de sorte que

$$\frac{a}{\cos(y)} > 0.$$

On vérifie facilement que x et y ainsi définis satisfont le système.

d) **Faux**. La composée d'une homothétie de rapport différent de ± 1 et d'une translation non-triviale n'est pas une isométrie, et n'est pas une autre homothétie.

e) **Faux**. La similitude $z \mapsto \overline{z} + 1$ est indirecte, mais n'a pas de point fixe (donc, *a fortiori*, pas d'axe invariant).

Exercice 4 (10 points)

Comme $\ln_{\mathbb{C}}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, il nous suffit de déterminer le module et l'argument des nombres proposés.

a) $\ln_{\mathbb{C}}(\pi) = \ln|\pi| = \ln(\pi)$.

b) $\ln_{\mathbb{C}}(\pi i) = \ln|\pi i| + i\frac{\pi}{2} = \ln(\pi) + i\frac{\pi}{2}$.

c) $\ln_{\mathbb{C}}(e^{\pi i}) = \ln|e^{\pi i}| + i\pi = \ln|-1| + i\pi = i\pi$.

d) $\ln_{\mathbb{C}}(-\pi i) = \ln|-\pi i| + i\frac{-\pi}{2} = \ln(\pi) - i\frac{\pi}{2}$.

e) $\ln_{\mathbb{C}}(i+1) = \ln|i+1| + i\frac{\pi}{4} = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 (10 points)

a) $z' = z + 3 - 2i$.

b) $z' = z\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = zi$.

c) $z' = (z - (3-i))\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) + (3-i) = (z - 3 + i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) + (3-i)$.

d) $z' = \overline{z}$, car $\theta = 0$ et $c = 0$.

e) L'axe a pour équation $y = 2x + 4$, donc $\theta = \arctan(2)$ et on peut choisir $c = 4i$ par exemple. De plus, $e^{2i\theta} = (\cos(\arctan(2)) + i\sin(\arctan(2)))^2 = \left(\frac{1+2i}{\sqrt{1+4}}\right)^2 = \frac{-3+4i}{5}$. On a alors

$$z' = \frac{-3+4i}{5}\overline{(z-4i)} + 4i = \frac{(4i-3)\overline{z} + 8i - 16}{5}$$

f) $z' = -2z$.

g) $z' = 3(z - (3-2i)) + 3 - 2i = 3z + 4i - 6$.

Exercice 6 (10 points)

a) Symétrie d'axe $i\mathbb{R}$, car $e^{2i\theta} = -1$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $c = 0$.

b) Translation par le vecteur $3 - 2i$.

c) On a $e^{2i\theta} = i$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$. La pente de l'axe de symétrie est donc égale à 1.
On calcule qu'il n'y a pas de point fixe. On remarque ensuite qu'on peut écrire

$$f(z) = i\overline{z}+3 = i\,\overline{z}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2} = i\left(\overline{z}-\frac{3}{2}\,i\right)-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2} = i\,\overline{\left(z+\frac{3}{2}i\right)}-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}(1+i).$$

Ainsi, l'axe de symétrie passe par $-\frac{3}{2}\,i = \left(0; -\frac{3}{2}\right)$ d'où son équation $a : 2x - 2y - 3 = 0$.
f est donc de la composition d'une symétrie d'axe a et d'une translation de vecteur $\frac{3}{2}(1 + i)$.

d) Rotation de centre $(0, 0)$ et de rapport $\frac{\pi}{3}$, car $e^{i\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

e) On a une multiplication par $1+i = \sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. On a donc une composition d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$.
Pour trouver le centre, il faut chercher le point fixe en résolvant l'équation $f(z) = z$. On obtient que le point fixe est $1 + i$.
Ainsi, on a une composition d'une rotation de centre $(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de centre $(1, 1)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

f) On a une multiplication par $1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. On a donc une composition d'une homothétie de rapport 2 et d'une symétrie d'axe de pente $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Pour trouver le centre, il faut chercher le point fixe en résolvant l'équation $f(z) = z$. On obtient que le point fixe est $\frac{2-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-3}{3}i$.
Ainsi, on a une composition d'un homothétie de centre $\left(\frac{2-2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}-3}{3}\right)$ et de rapport 2 et d'une symétrie d'axe $3\sqrt{3}x - 9y + \sqrt{3} - 3 = 0$.

Exercice 7 (10 points)

On voit que l'équation de la similitude sera de la forme

$$f(z) = c \cdot z + b$$

avec $c, b \in \mathbb{C}$. En écrivant $c = c_1 + c_2 i$ et $b = b_1 + b_2 i$, on arrive facilement à ramener le problème à un système linéaire d'équations, et on trouve

$$f(z) = \left(\frac{3 - i}{2}\right) z + \frac{9 + 13i}{2}.$$

Il s'agit de la composition d'une rotation de centre $(2, -11)$ et d'angle $-18,43^o$ et d'une homothétie de centre $(2, -11)$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 8 (10 points)
Un homothétie est caractérisée par un rapport d'homothétie $R \neq 0$ et un centre d'homothétie $c \in \mathbb{C}$. De plus, on sait que toute similitude directe s'écrit comme

$$z \mapsto az + b,$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Comme l'image de c par l'homothétie est c et l'image de $c+1$ est $c+R$, on a les deux conditions

$$ac + b = c \text{ et } a(c+1) + b = c + R,$$

d'où on déduit facilement que $a = R$ et $b = c(1-R)$. Ainsi, l'homothétie s'écrit

$$z \mapsto Rz + c(1-R) = R(z-c) + c.$$

Exercice 9 (5 points)
Considérons les points $re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Alors, par application du logarithme, on a

$$\ln|r| + i\theta.$$

En laissant θ parcourir $]-\pi, \pi[$, cet ensemble de point correspond à un "segment vertical" de longueur 2π ayant pour milieu le point $]\ln(r), 0[$.