Corrigé série 12

Exercice 1 (5 points)

Soient c un des côtés de la base carrée du parallélépipède rectangle et h la hauteur de celui-ci. Le volume du parallélépipède et $V = hc^2$, donc $h = \frac{V}{c^2}$. La surface est alors donnée par

$$S(c) = 2c^2 + 4ch = 2c^2 + \frac{4V}{c},$$

qui est définie sur l'intervalle $]0, \infty[$. On a que

$$S'(c) = 4c - \frac{4V}{c^2}$$

qui vaut 0 en $c = \sqrt[3]{V}$. En fait, $S(c)$ admet un minimum global ici, car

$$S''(c) = 4 + \frac{8V}{c^3} > 0 \quad \text{pour tout } c \in]0, \infty[.$$

Ainsi, la surface minimale de ce parallélépipède est

$$S(\sqrt[3]{V}) = 6V^{2/3}.$$

Dans le cas $V = 0.5$ litres, la surface minimale est

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 3\sqrt[3]{2} \quad \mathrm{dm}^2$$

et les dimensions sont $c = \sqrt[3]{0.5}$ et $h = \frac{0.5}{\sqrt[3]{0.5^2}} = \sqrt[3]{0.5}$. C'est donc un cube !

Exercice 2 (5 points)

L'aire de la feuille est $(x + 6)(y + 10)$, où $x, y > 0$ sont la largeur et la hauteur du texte imprimé. Comme l'aire du texte vaut 600 cm^2, on a que $x = \frac{600}{y}$. Ainsi, on veut trouver le minimum de la fonction

$$f(y) = \left(\frac{600}{y} + 6\right)(y + 10) = 660 + \frac{6000}{y} + 6y.$$

On a que

$$f'(y) = 6 - \frac{6000}{y^2}$$

qui s'annule en $y = \sqrt{1000}$. De plus, pour tout $y > 0$, on a que

$$f''(y) = \frac{12000}{y^3} > 0.$$

Ainsi, lorsque $y > 0$, f admet un minimum en $y = \sqrt{1000}$. Les dimensions optimales de la feuille sont donc d'une hauteur de $\sqrt{1000} + 10 = 10(\sqrt{10} + 1)$ cm et d'une largeur de $\frac{600}{\sqrt{1000}} + 6 = 6(\sqrt{10} + 1)$ cm.

Exercice 3 (5 points)
On veut maximiser la fonction xy où $2x + y = 500$, $0 < y < 500$, $0 < x < 250$. Ainsi, on veut maximiser

$$f(x) = x(500 - 2x) = 500x - 2x^2, \quad 0 < x < 250.$$

En fait, $f(x)$ est une parabole concave qui admet un sommet en $x = 125$. Les dimensions optimales sont donc $x = 125$ m, $y = 250$ m. (On suppose implicitement que la largeur de la ferme est au moins 250 m.)

Exercice 4 (5 points)
On cherche les coordonnées du point $A(x; 0)$. Les coordonnées du point B sont $(x; \sqrt{9 - x})$. On a les conditions $0 < x < 9$ et la fonction à maximiser est $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{9 - x}$.
Dérivons cette fonction :

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 - x} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{9 - x}} = \frac{2(9 - x) - x}{4\sqrt{9 - x}} = \frac{18 - 3x}{4\sqrt{9 - x}}$$

qui s'annule en $x = 6$. On vérifie qu'il s'agit bien d'un maximum avec la dérivée seconde ou avec un tableau de signe.
Le point cherché est donc $A(6; 0)$. L'aire maximale vaut $3\sqrt{3}$.

Exercice 5 (5 points)
Posons x la largeur et h la hauteur du tiroir. On doit donc avoir $x, h > 0$. On sait que $x \cdot h \cdot 40 = 8'000$, donc $h = \frac{200}{x}$. On cherche à minimiser le coût de fabrication qui est donné par

$$0,08 \cdot xh + 2 \cdot 0,04 \cdot 40h + 0,04 \cdot 40x + 0,04 \cdot xh = 0,12xh + 3,2h + 1,6x.$$

En remplaçant h, on obtient la fonction

$$C(x) = 24 + \frac{640}{x} + 1,6x.$$

On dérive cette fonction et on obtient

$$C'(x) = -\frac{640}{x^2} + 1,6 = \frac{1,6x^2 - 640}{x^2} = \frac{1,6(x^2 - 400)}{x^2} = \frac{1,6(x-20)(x+20)}{x^2}.$$

On a $D(C') = \mathbb{R} - \{0\}$ et les zéros sont $x = \pm 20$. Comme $x > 0$, vérifions que 20 est bien un minimum. Pour cela, on calcule la dérivée seconde :

$$C''(x) = \frac{3,2x \cdot x^2 - (1,6x^2 - 640) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3,2x^3 - 3,2x^3 + 1280x}{x^4} = \frac{1280}{x^3} > 0.$$

On a donc bien un minimum en $(20; 88)$. De plus, si $x = 20$, alors $h = 10$. Par conséquent, les dimensions du tiroir doivent être de 20 cm x 10 cm x 40 cm et le coût minimal est égal à CHF 88.-.

Exercice 6 (10 points)

a) Soit $f(x) = x^x$.

— Le domaine de définition de f est $]0, \infty[$. C'est une conséquence de notre définition

$$x^x := e^{x \ln x}.$$

— Le graphe de f n'a aucune symétrie.

— f n'a aucune asymptote. f n'est pas périodique.

— La dérivée de f est

$$f'(x) = (\ln x + 1)x^x \text{ pour tout } x > 0.$$

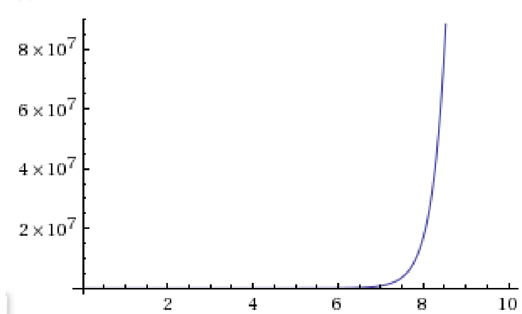
— f est croissante en $\left]\frac{1}{e}, \infty\right[$; f est décroissante en $]0, \frac{1}{e}[$.

— f admet un minimum global en $x = \dfrac{1}{e}$.

— La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = x^{x-1} + x^x(\ln x + 1)^2.$$

— f est toujours convexe ; f n'a aucun point d'inflexion.



b) Soit $f(x) = \text{Argtanh}(\sinh x)$.

— Il faut que $-1 < \sinh x < 1$. Donc, le domaine de définition de f est $\left]\ln(-1+\sqrt{2}), \ln(1+\sqrt{2})\right[$.

— f est impaire.

— f admet deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 1$. f n'est pas périodique.

— On trouve que

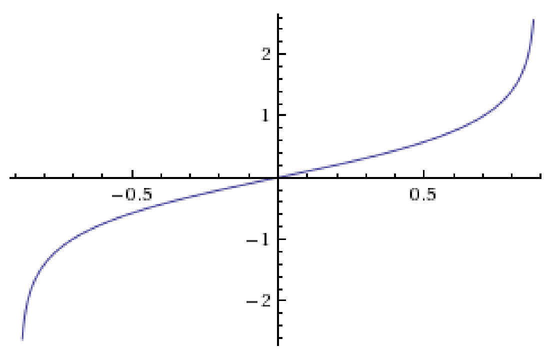
$$f'(x) = \frac{\cosh x}{1 - \sinh^2 x}.$$

— Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]\ln(-1+\sqrt{2}), \ln(1+\sqrt{2})\right[$, f est toujours croissante.

— On trouve que

$$f''(x) = \frac{\sinh x}{1 - \sinh^2 x} + \frac{2 \sinh x \cosh^2 x}{(1 - \sinh^2 x)^2}.$$

— Comme $f''(x) < 0$ pour $x \in \left]\ln(-1+\sqrt{2}), 0\right[$ et $f''(x) > 0$ pour $x \in \left]0, \ln(1+\sqrt{2})\right[$, on voit que 0 est le seul point d'inflexion de f.



Exercice 7 (10 points)

Dans toutes les parties, C est une constante réelle.

a) Le domaine de définition de $f(x) = e^{3x}$ est tout $\mathbb{R}$. Une primitive de f est $\dfrac{e^{3x}}{3}$.

b) Le domaine de définition de $f(x) = (x+2)^2$ est tout $\mathbb{R}$. Une primitive de f est $\dfrac{(x+2)^3}{3}$.

c) Le domaine de définition de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ est $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. En notant que

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

on trouve qu'une primitive de f est

$$\ln|x-1| - \ln|x| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

d) Le domaine de définition de $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ est $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. En notant que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right),$$

on trouve qu'une primitive de f est

$$\frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\right).$$

e) Le domaine de définition de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ est tout $\mathbb{R}$. Une primitive de f est $3\sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

f) Le domaine de définition de

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

est $\mathbb{R} - [-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}]$ (comme les racines de x^2+6x+7 sont $-3 \pm \sqrt{2}$). Une primitive de f est

$$\sqrt{x^2+6x+7}.$$

g) Une primitive de f est $20x^{1/4}$.

h) Une primitive de f est $\dfrac{1}{-2(1+x^2)^2}$.

i) Une primitive de f est $\dfrac{1}{2}\sinh(x^2) + x^2$.

Exercice 8 (5 points)

On a que

$$\ln(x^2) + \ln(y^2) = \ln((xy)^2) = 2\ln(6),$$

et donc

$$(xy)^2 = e^{2\ln 6} = 36.$$

Avec la condition $x^2 + y^2 = 13$, on trouve que

$$\frac{36}{y^2} + y^2 = 13,$$

donc,

$$(y^2)^2 - 13y^2 + 36 = (y^2-9)(y^2-4) = 0.$$

De manière similaire, on trouve que

$$(x^2-9)(x^2-4) = 0.$$

Ainsi, on trouve que les huit solutions (x, y) sont $(\pm 2, \pm 3)$ et $(\pm 3, \pm 2)$.

Exercice 9 (10 points)

a) **Vrai.** Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors $F(x) + c$ est une primitive, où $c \in \mathbb{R}$. Comme il y a une infinité de nombres réelles, f admet une infinité de primitives.

b) **Faux.** En fait, la fonction constante nulle, $f(x) = 0$, a plusieurs primitives : chaque fonction $F(x) = c$, où $c \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.

c) **Faux.** En fait, $f(x) = |x|$ a des primitives $F(x)$, à savoir, pour $C \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)x^2}{2} + C,$$

où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

d) **Vrai.** On a

$$\sinh(2x) + \sinh x = 0 \Leftrightarrow e^{4x} + e^{3x} = e^{3x}(e^x + 1) = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

e) **Faux.** La fonction $f(x) = -1$ est convexe. Cependant, ses primitives

$$F(x) = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

sont décroissantes.

f) **Vrai.** Si $f(x)$ est une fonction dérivable strictement croissante, alors une de ses primitives, $F(x)$, satisfait

$$F'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad F''(x) = f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $F(x)$ est convexe partout.

Exercice 10 (5 points)

On peut récrire l'équation $\cosh^2 x - 4 \sinh x + 2 = 0$ comme

$$\sinh^2 x - 4 \sinh x + 3 = (\sinh x - 3)(\sinh x - 1) = 0.$$

On obtient

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3.$$

Dans le premier cas, on trouve que

$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0,$$

et donc $e^x = 1 \pm \sqrt{2}$. Il est impossible que e^x soit négatif, ainsi $x = \ln(1 + \sqrt{2})$. De manière similaire, si $\sinh x = 3$, on trouve que $x = \ln(3 + \sqrt{10})$.

Exercice 11 (5 points)

a) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

b) Sur $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

c) Sur $]-\infty, 0[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

Ainsi, sur $\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

d) $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,dx = \frac{\ln|4x-3|}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

e) Comme $\sin x = -(\cos x)'$,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|\ \ c \in \mathbb{R}.$$

De manière similaire, on trouve

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|\ \ c \in \mathbb{R}.$$