Correction partie ouverte

Lénaïc Chizat

December 6, 2023

NB: The corrections are not intended as ideal examples for students, but rather are given as examples of minimal-redaction answers.

1 Question 1 (8pts)

(a) 2 points.

La série est de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ avec, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$. On a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}k}{(k+2)!}\frac{(k+1)!}{2^k(k-1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(k+2)}\frac{k}{k-1} = 0.$$

Donc par le critère de D'Alembert, la série converge (absolument).

(b) 4 points.

Soit P_n l'hypothèse de récurrence:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} = 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Initialisation. Vérifions que P_1 est vraie. Pour $n = 1$, on a, d'une part

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} = \frac{2(0)}{1!} = 0,$$

et d'autre part

$$2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2 - \frac{2^1}{1!} = 2 - 2 = 0.$$

Donc P_1 est vraie.
Hérédité. Supposons que P_{n-1} est vraie pour $n \geq 2$, et montrons qu'alors, P_n est vraie. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} + \frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} \\ &= 2 - \frac{2^n}{n!} + \frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} \\ &= 2 - \frac{2^n((n+1)-(n-1))}{(n+1)!} \\ &= 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Donc P_{n-1} implique P_n.

Conclusion. Par récurrence, on conclut que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) 2 points.

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. Cela peut se justifier par exemple en remarquant que pour $n \geq 3$, on a $n! \geq 3^{n-2}$ et donc

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{3^{n-2}} = 4\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-2} \to 0.$$

(mais la justification n'est pas exigée). Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2.$$

2 Question 2 (3 pts)

La fonction g est dérivable, comme somme et produit de fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) - xf''(x) = -xf''(x).$$

Par ailleurs, comme f est convexe et deux fois dérivable, alors (par le cours) $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \leq 0$. On conclut donc que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.

3 Question 3 (5 pts)

3.1 (a) 2 points

En étudiant le signe de $x^2 - x$, on obtient que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{3}{2}x & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En particulier, f est dérivable sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$ avec $f_g'(1) = -2 \cdot 1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ et $f_d'(1) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Comme $f_g'(1) \neq f_d'(1)$, la fonction f n'est pas dérivable en 1.

3.2 (b) 3 points

Les extrema sont à chercher parmi les points suivants:

- les bords de l'intervalle (0 et 2);
- les point de non-différentiabilité (1);
- les points stationnaires (ou points critiques);

Comme $f_d'(1)$ et $f_g'(1)$ sont de signe opposés, 1 est un extremum local. Par ailleurs 0 et 2 sont aussi des extrema locaux car $f_d'(0) = \frac{3}{2} \neq 0$ et $f_g'(2) = \frac{7}{2} \neq 0$.

Cherchons maintenant les points stationnaires de f. Sur l'intervalle $]0,1[$, on a

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Puisque $\frac{3}{4} \in]0,1[$, c'est un point critique. Sur l'intervalle $]1,2[$, on a

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Puisque $\frac{1}{4} \notin]1,2[$, il n'y a point de point critique sur $]1,2[$

En conclusion, les points stationnaires sont $0, \frac{3}{4}, 1$ et 2.