Exercice 1.

a) En s'inspirant de la preuve vue en cours du théorème fondamental de l'analyse, démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction

$$G(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

est une primitive de f.

b) En déduire la dérivée des fonctions $H_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, exprimées en fonction de f :

$$H_1(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt, \qquad H_2(x) = \int_x^0 f(t)\,dt, \qquad H_3(x) = \int_{-x}^{3x} f(t)\,dt$$

Solution.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous montrons que $G'(x) = f(x)$ avec la définition de la dérivée :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} f(c_h) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

où on a utilisé la règle de Chasles dans la 3e égalité, le théorème de la moyenne dans la 4e égalité (avec $c_h \in [x, x+h]$) et la continuité de f (puisque $\lim_{h\to 0} c_h = x$, alors $\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$).

b) Il suffit d'exprimer chaque fonction selon $G(x)$ et dériver :

$$H_1'(x) = (G(x^2))' = 2x \cdot G'(x^2) = 2xf(x^2).$$

$$H_2(x) = -\int_0^x f(t)\,dt = -G(x) \qquad \Longrightarrow \qquad H_2'(x) = -G'(x) = -f(x).$$

$$H_3(x) = \int_0^{3x} f(t)\,dt - \int_0^{-x} f(t)\,dt = G(3x) - G(-x) \qquad \Longrightarrow \qquad H_3'(x) = 3G'(3x) + G'(-x) = 3f(3x) + f(-x).$$

Remarques. *Le point (i) peut se généraliser de la manière suivante : si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f.
De plus, si $g, h \in C^1(\mathbb{R})$, alors

$$H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad H'(x) = g'(x)f(g(x) - h'(x)f(h(x)).$$

Exercice 2 (Changements de variables d'intégrales définies)**.**
Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\,dx$

Indication : pour (d), utiliser l'identité $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Solution.

a) On utilise le changement de variable $u = \sqrt{x+1}$. On pose donc $x = u^2 - 1$, $dx = 2u\,du$. Comme x varie entre $a = 2$ et $b = 3 = \varphi(2)$, les bornes de u sont $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2-1}\,du = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\,du \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}\,du \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1}\,du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1}\,du \\
&= \left[2u + \ln\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\right]_{\sqrt{3}}^2 = 4 - 2\sqrt{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\right).
\end{aligned}$$

b) On utilise le changement de variable $u = \sqrt{x}$. On pose donc $x = u^2$, $dx = 2u\,du$. Comme x varie entre $a = \frac{\pi^2}{16}$ et $b = \frac{\pi^2}{9}$, les bornes de u sont $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} u\cos(u)\,du \overset{(*)}{=} 2\Big[u\sin(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u)\,du \\
&= 2\Big[u\sin(u) + \cos(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ ,
\end{aligned}$$

où on a intégré $(*)$ par parties avec $f'(u) = \cos(u)\,,\ g(u) = u$.

*c) **Méthode rapide.** Nous pouvons directement observer que l'intégrande est une dérivée de composition de 3 fonctions :*

$$\Big(\cos(\sin(x^{33}))\Big)' \;=\; -\sin(\sin(x^{33}))\cdot\cos(x^{33})\cdot 33x^{32}.$$

En compensant les constantes issues des dérivées internes, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx &= -\frac{1}{33}\Big[\cos(\sin(x^{33}))\Big]_0^{\pi^{1/33}} \\
&= \frac{1}{33}\cos(\sin(0)) - \cos(\sin(\pi)) \\
&= \frac{1}{33}(\cos(0) - \cos(0) = 0
\end{aligned}$$

***Avec un changement de variable.** On pose $u = x^{33}$ d'où $du = 33x^{32}\,dx$. Les bornes deviennent 0 et π, d'où*

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx \;=\; \frac{1}{33}\int_0^{\pi} \sin(\sin(u))\cos(u)\,du.$$

Cette dernière intégrale est une dérivée d'une composition de deux fonctions :

$$(\cos(u))' \;=\; -\sin(\sin(u))\cos(u).$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{33}\int_0^{\pi} \sin(\sin(u))\cos(u)\,du \;=\; \frac{-1}{33}[\cos(\sin(u))]_0^{\pi} \;=\; \frac{1}{33}\cos(\sin(0) - \cos(\sin(\pi)) = 0.$$

d) En utilisant que $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, *on observe que*

$$\sin(x)^5 = \left(1 - \cos(x)^2\right)^2 \sin(x),$$

ce qui inspire le changement de variable $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)\,dx$. *Comme les bornes de* x *sont* $\alpha = 0$ *et* $\beta = \frac{\pi}{2}$, *les bornes de* t *sont* $a = 1$ *et* $b = 0$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos(x)^2\right)^2 \sin(x)\,dx &= -\int_1^0 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4)\,dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (Changements de variables d'intégrales indéfinies)**.**
Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\,dx$

Solution.

a) Nous effectuons le changement de variable $y = e^x$ *(ça marche aussi avec* $y = 1 + e^x$*), d'où* $dy = e^x\,dx = y\,dx$. *L'intégrale devient alors*

$$\int \frac{1}{y(1+y)}\,dy.$$

On peut la calculer directement avec une "feinte du loup" :

$$\int \frac{1+y-y}{y(1+y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \ln|y| - \ln|y+1| + C = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C.$$

Alternativement, nous pouvons décomposer en éléments simples (plus long) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \quad &\Longrightarrow \quad 1 = A(y+1) + By = y(A+B) + A \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1, \end{cases} \quad ce qui donnera le même résultat que ci - \end{aligned}$$

b) Posons I *l'intégrale cherchée. Deux changements de variables possibles sont* $y = \sqrt[3]{x}$ *ou* $y = 1 + \sqrt[3]{x}$. *Les deux ont des facilités et difficultés différentes ; voici la démarche pour chacune.*

D'une part, si $y = \sqrt[3]{x}$ *alors* $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \dfrac{1}{3y^2}\,dx$ *d'où*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3y^2}{1+y}\,dy = 3\int \frac{y^2 - 1 + 1}{1+y}\,dy = 3\int \left(y - 1 + \frac{1}{1+y}\right)dy \\ &= 3\left(\frac{(y-1)^2}{2} + \ln|1+y|\right) + C = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)^2 + 3\ln|1 + \sqrt[3]{x}| + C. \end{aligned}$$

Ici la première intégrale a été simplifiée grâce à une feinte du loup, mais elle aurait aussi pu être résolue avec une division euclidienne.

D'autre part, si $y = 1 + \sqrt[3]{x}$*, alors* $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \dfrac{1}{3(y-1)^2}\,dx$ *d'où*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3(y-1)^2}{y}\,dy = 3\int \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right)\,dy = 3\left(\frac{(y-2)^2}{2} + \ln|y|\right) + C \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x}-1)^2 + 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| + C. \end{aligned}$$

Il est possible que votre réponse finale soit de la forme

$$I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| + C,$$

qui diffère de la solution ci-dessus d'une constante $\frac{3}{2}$*. C'est correct aussi ! Gardez en tête que la constante* C *etant arbitraire, elle peut "absorber" toute autre constante numérique.*

c) *Soit le changment de variables*

$$\begin{cases} y = \sqrt{1+\frac{1}{x}} & \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{y^2-1} \\ dy = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}\,dx & \Longrightarrow \quad dx = \dfrac{-2y}{(y^2-1)^2}\,dy \end{cases}.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{y}{1/(y^2-1)}\cdot\frac{-2y}{(y^2-1)^2}\,dy = -2\int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy = -2\int\left(1+\frac{1}{y^2-1}\right)\,dy \\ &= -2y + \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + C \;=\; -2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}\right| + C. \end{aligned}$$

Une manière plus lente, mais plus "sûre" de retrouver le même résultat est de faire d'abord le changement de variables $y = \frac{1}{x}$*, puis un second changement de variable* $z = \sqrt{1+y}$*.*

Exercice 4 (Intégrales de fonctions rationelles)**.**
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$

Solution.

a) *En factorisant le dénominateur, nous pouvons décomposer la fonction en éléments simples :*

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad 3x+2 = A(x-3) + B(x-1).$$

En posant $x = 3$ *et* $x = 1$ *dans l'égalité précédente, nous avons immédiatement* $A = -5/2$ *et* $B = 11/2$*. Ainsi,*

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{-5}{2}\ln|x-1| + \frac{11}{2}\ln|x-3| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-3)^{11}}{(x-1)^5}\right| + C.$$

b) Avec une division euclidienne ou une feinte du loup, nous pouvons reécrire

$$\frac{x^2+x+1}{x-x^2} = -1 - \frac{2x+1}{x(x-1)}.$$

Cette dernière fraction peut se décomposer en éléments simples :

$$-\frac{2x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \qquad \Longrightarrow \qquad -2x-1 = A(x-1)+Bx.$$

En remplaçant x par 0 et 1 dans la dernière égalité, nous avons $A=1$ et $B=-3$ d'où

$$I = \int \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1}\right) dx = -x + \ln|x| - 3\ln|x-1| + C = -x + \ln\left|\frac{x}{(x-1)^3}\right|.$$

c) Une division euclidienne suivie d'une décomposition en éléments simples donne l'écriture

$$\frac{x^3+2}{x^2+x-6} = x-1+\frac{7x-4}{x^2+x-6} = x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+3},$$

d'où

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-2| + 5\ln|x+3| + C.$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{(\frac{2x}{3})^2+1}\,dx = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$

Exercice 5 (Intégrales généralisées)**.**
Déterminer si les intégrales généralisées suivantes convergent. Le cas échéant, calculer leur limite.

a) $\displaystyle I = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle I = \int_{1^+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ c) $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \sin(x)\,e^{-x}\,dx$

Solution.

a) C'est une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx\,.$$

On intègre dans l'intégrale de droite par parties avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ [$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$] et $g(x) = \ln(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$]

$$\begin{aligned}\int_1^{R} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^R - \int_1^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{1}{R}\ln(R) + \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{R}\ln(R) - \left[\frac{1}{x}\right]_1^R \\ &= -\frac{1}{R}\ln(R) - \frac{1}{R} + 1\,.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale généralisée I on trouve donc

$$\begin{aligned}I = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\ln(R) - \frac{1}{R} + 1\right) \\ &= 1\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé la règle de Bernoulli-l'Hospital pour calculer

$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\ln(R)\right) = -\lim_{R\to\infty}\frac{\ln(R)}{R} = -\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0\,.$$

b) C'est une intégrale généralisée de type 1 qui s'écrit

$$I = \int_{1^+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx = \lim_{\alpha \to 1^+} \int_{\alpha}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx\,.$$

Nous pouvons calculer l'intégrale à droite, avec le changement de variable $y = \sqrt{x-1}$, *ou avec une feinte du loup subtile :*

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{2} \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}\, dx &= \int_{\alpha}^{2} \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}\right]_{\alpha}^{2} \\ &= \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\sqrt{(\alpha-1)^3} + 2\sqrt{\alpha-1}.\end{aligned}$$

En passant à la limite, l'intégrale converge vers $\frac{8}{3}$.

c) Il s'agit d'une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ *[*$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}$*] et* $g(x) = \sin(x)$ *[*$\Rightarrow g'(x) = \cos(x)$*]. On obtient*

$$\begin{aligned} I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \Big[-\sin(x)\, e^{-x}\Big]_0^R + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \Big(-\sin(R)\, e^{-R}\Big) + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx\ , \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty} \big(\sin(R)\, e^{-R}\big) = 0$. *En effet, on a* $\lim_{R\to\infty} e^{-R} = 0$ *et* $-1 \le \sin(R) \le 1$, *ce qui permet de conclure par le théorème des deux gendarmes.*
On intègre une deuxième fois par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ *[*$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}$*] et* $g(x) = \cos(x)$ *[*$\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$*] pour obtenir*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \Big[-\cos(x)\, e^{-x}\Big]_0^R - \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \big(-\cos(R)\, e^{-R} + 1\big) - I \\ &= 1 - I\ , \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty} \big(-\cos(R)\, e^{-R}\big) = 0$ *(conclusion par le théorème des deux gendarmes comme ci-dessus).*
On a donc $I = 1 - I$, *d'où*

$$I = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 6.
VRAI ou FAUX ?
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset D$ (avec $a < b$).

a) L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

b) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que

$$S = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

c) Il existe $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

Solution.

a) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *qui est continue sur* $]0,1[$.

b) VRAI.
Si $f \in \mathcal{C}^0(]a,b[)$, *alors* $f \in \mathcal{C}^0([\alpha,\beta])$ *pour* $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$. *Donc l'intégrale existe.*

c) VRAI.
Soit $\alpha \in]a,b[$. *Par la question précédente,* $F(x) := \int_\alpha^x f(t)dt$ *est bien définie pour tout* $x \in]a,b[$ *et on a vu dans le cours que* F *est une primitive de* f.

Exercice challenge.

Exercice 7 (Séries de Riemann)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer la convergence des séries de Riemann : la série

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p > 1.$$

a) Si $p > 1$, montrer que
$$\frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\, dx, \quad \forall k \geq 2.$$
En déduire la convergence de S_n.
Indication : la fonction $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

b) Si $0 < p < 1$, montrer que
$$\frac{1}{k^p} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx, \quad \forall k \geq 1.$$
En déduire la divergence de S_n.

c) Représenter graphiquement la signification des inégalités ci-dessus.

Solution.

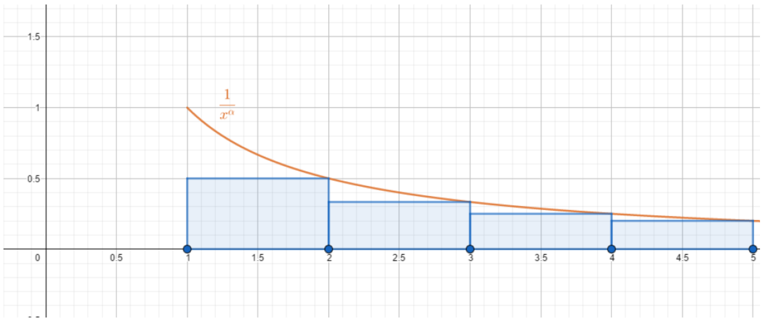
a) Soit $k \geq 2$. *Alors pour tout* $x \in [k-1,k]$, *nous avons, par décroissance de la fonction* $f(x) = \frac{1}{x^p}$
$$x \leq k \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{x^p}.$$
Par la monotonie de l'intégrale,
$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^p}\, dx}_{=\frac{1}{k^p}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}.$$
Par la règle de Chasles, en sommant sur tous les intervalles $[k-1,k]$ *pour* $2 \leq k \leq n$, *nous avons*
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}.$$
En passant à la limite, puisque $p > 1$, *l'intégrale de droite converge vers* $\frac{1}{p-1}$. *Ainsi* S_n *est majorée et croissante, donc convergente.*

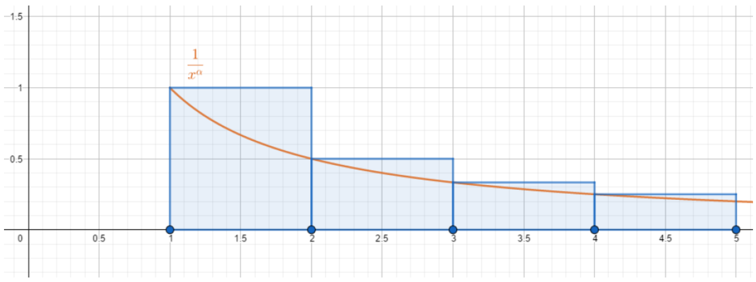
b) *L'inégalité se démontre exactement comme dans le point précédent. Nous en déduisons que pour tout* $n \geq 1$*,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^p}.$$

En passant à la limite, l'intégrale de droite diverge vers $+\infty$ *et donc* S_n *diverge.*

c)





Géométriquement les deux inégalités de l'énoncé comparent l'aire d'un rectangle de base $[n, n+1]$ *(en bleu dans le dessin) avec l'aire sous la courbe (en orange)de* $\frac{1}{x^p}$ *dans ce même intervalle. Une série de Riemann correspond à la somme de ces rectangles, qui est soit plus petite que l'aire totale sous la courbe (pour montrer la convergence), soit plus grande (pour montrer la divergence).*