EPFL – Automne 2025	S. Basterrechea
Analyse I – CGC, EL, MX	**Exercices**
Série 14	18 décembre 2025

Exercice 1.

a) En s'inspirant de la preuve vue en cours du théorème fondamental de l'analyse, démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction

$$G(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

est une primitive de f.

b) En déduire la dérivée des fonctions $H_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, exprimées en fonction de f :

$$H_1(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt, \qquad H_2(x) = \int_x^0 f(t)\, dt, \qquad H_3(x) = \int_{-x}^{3x} f(t)\, dt$$

Exercice 2 (Changements de variables d'intégrales définies)**.**
Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\, \cos(x^{33})\, x^{32}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\, dx$

Indication : pour (d), utiliser l'identité $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Exercice 3 (Changements de variables d'intégrales indéfinies)**.**
Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\, dx$

Exercice 4 (Intégrales de fonctions rationelles)**.**
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x-x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\, dx$

Exercice 5 (Intégrales généralisées)**.**
Déterminer si les intégrales généralisées suivantes convergent. Le cas échéant, calculer leur limite.

a) $\displaystyle I = \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$

b) $\displaystyle I = \int_{1^+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

c) $\displaystyle I = \int_0^\infty \sin(x)\, e^{-x}\, dx$

Exercice 6.
VRAI ou FAUX ?
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset D$ (avec $a < b$).

a) L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

b) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que
$$S = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

c) Il existe $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice challenge.

Exercice 7 (Séries de Riemann)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer la convergence des séries de Riemann : la série
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p > 1.$$

a) Si $p > 1$, montrer que
$$\frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\, dx, \quad \forall k \geq 2.$$
En déduire la convergence de S_n.
Indication : la fonction $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) Si $0 < p < 1$, montrer que
$$\frac{1}{k^p} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx, \quad \forall k \geq 1.$$
En déduire la divergence de S_n.

c) Représenter graphiquement la signification des inégalités ci-dessus.