Information, Calcul et Communication

Cryptographie à clé secrète

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Scénario

secret K partagé (clé)

Alice

Bob

message

Encrypte $C = f(M, K)$ ------ Décrypte $D = g(C, K)$

message chiffré

Eve

message déchiffré

Eve intercepte C mais ne sait pas trop quoi en faire sans la clé K…

Clé à usage unique *(«one-time pad»)*

Rappel : $x \oplus y = 0$ ssi $x = y$

- Voici une recette 100% sûre pour encrypter un message M de n bits :

Pour cela, il faut supposer que la clé secrète K est composée également de n bits **et** générée de la façon suivante :

Clé à usage unique *(«one-time pad»)*

- Voici une recette 100% sûre pour encrypter un message M de n bits :

Pour cela, il faut supposer que la clé secrète K est composée également de n bits **et** générée de la façon suivante :

Chacun des bits K_i est tiré uniformément au hasard
(i.e. $P(K_i = 1) = P(K_i = 0) = {}^1/_2$)

et tous les tirages sont effectués indépendamment,
et aussi indépendamment du message M.

- Alice envoie alors $C = M \oplus K$ (XOR bit par bit : pas de retenue ici)
  - Exemple : Si $M = \underline{01101101}$ et $K = \underline{11101100}$, alors $C = \underline{10000001}$

Clé à usage unique *(«one-time pad»)*

- Pour décrypter le message, Bob effectue l'opération :

$$D = C \oplus K = (M \oplus K) \oplus K = M \oplus \underbrace{(K \oplus K)}_{=} = M$$

séquence de 0 !

- Si Eve intercepte C, elle ne peut rien faire car :

$$P(C_i = 0) = P(M_i \oplus K_i = 0) = P(K_i = M_i) = \frac{1}{2} \quad \forall M_i$$

$$P(C_i = 1) = P(M_i \oplus K_i = 1) = P(K_i \neq M_i) = \frac{1}{2} \quad \forall M_i$$

- Pour Eve, le message C est une séquence de bits tirés uniformément au hasard ! → Le système est sûr à 100% !

Défauts de ce système

- Pour envoyer un message de longueur n, il faut générer une clé de même longueur, qu'il faut trouver le moyen de partager secrètement avant de communiquer…
- Si la clé n'est pas générée parfaitement aléatoirement, alors le secret n'est plus assuré à 100% (imaginez par exemple que $K = 00000000$, dans le pire des cas…)
- Gare à ne pas réutiliser la même clé K pour envoyer deux messages M_1 et M_2 à la suite avec ce système !

  A partir de $C_1 = M_1 \oplus K$ et $C_2 = M_2 \oplus K$, Eve peut effectuer :

$$C_1 \oplus C_2 = (M_1 \oplus K) \oplus (M_2 \oplus K) = (M_1 \oplus M_2) \oplus (K \oplus K) = M_1 \oplus M_2$$

$\rightarrow$ plus aucune garantie de sécurité !

Alice envoie deux messages M_1 et M_2 avec la même clé k :

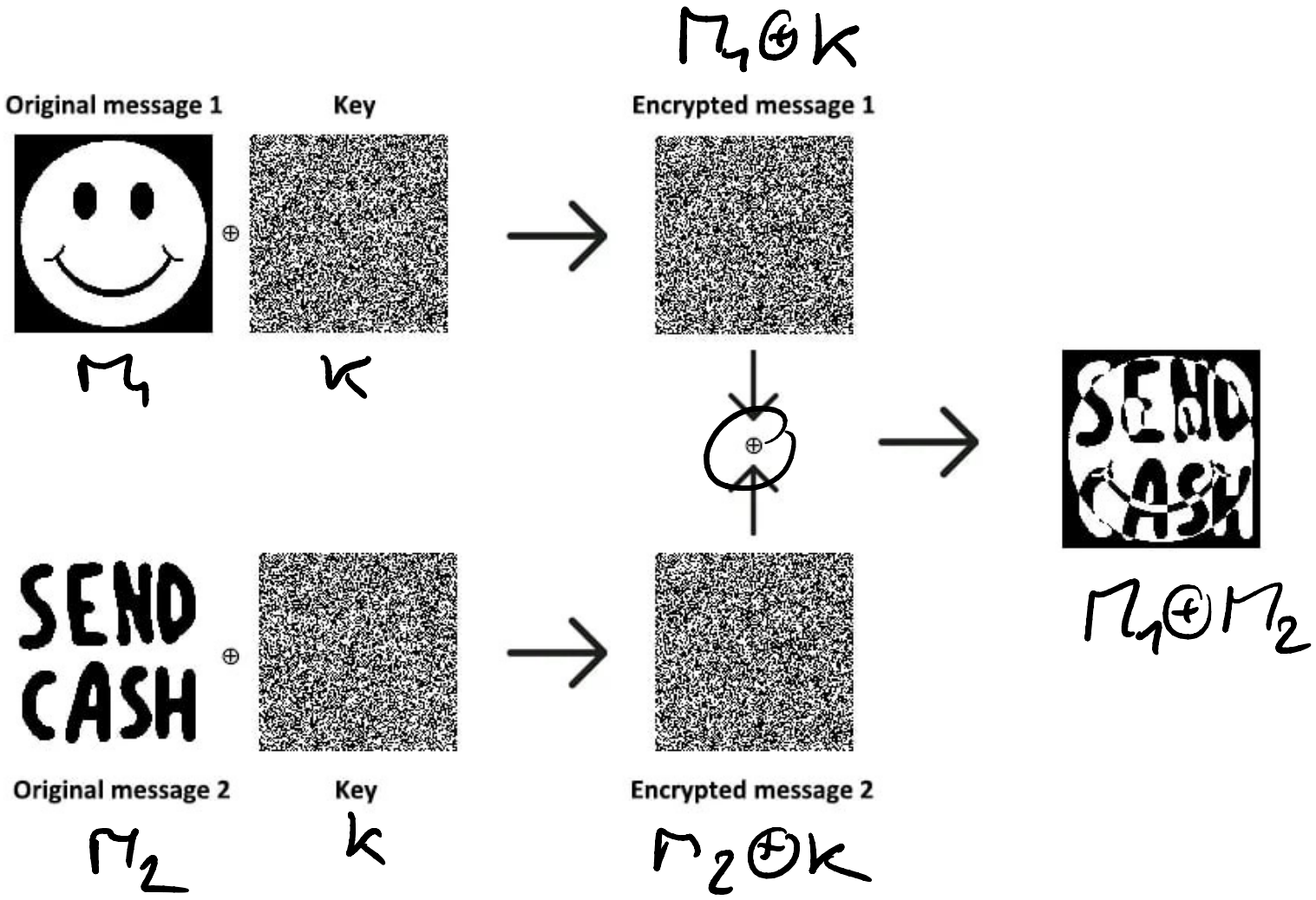
elle envoie $\begin{cases} C_1 = M_1 \oplus k \\ C_2 = M_2 \oplus k \end{cases}$

Bob effectue $C_1 \oplus k = M_1$, $C_2 \oplus k = M_2$

Mais : Eve effectue $C_1 \oplus C_2 = (M_1 \oplus k) \oplus (M_2 \oplus k)$

$= M_1 \oplus M_2 \oplus \underline{k \oplus k} = \underline{M_1 \oplus M_2}$

Une clé non-réutilisable: illustration



Un essai pour réutiliser la clé k :

Soit $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$

$(k, M) \longmapsto f(k, M)$

une fonction non-linéaire (⇔ compliquée)

Alice envoie $C_1 = \Pi_1 \oplus f(k, M_1)$, $C_2 = \Pi_2 \oplus f(k, M_2)$

Eve peut faire $C_1 \oplus C_2 \rightsquigarrow$ (?)

Mais Bob ne peut rien faire non plus !

2e idée : séparer le message M et la clé K en deux parties :

$$M = (\underbrace{M_a}_{n \text{ bits}}, \underbrace{M_b}_{n \text{ bits}}) \qquad K = (\underbrace{K_a}_{n \text{ bits}}, \underbrace{K_b}_{n \text{ bits}})$$

La même fonction $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ est utilisée :

Alice calcule successivement $\begin{cases} C_a = M_a \oplus f(K_a, M_b) \\ C_b = M_b \oplus f(K_b, C_a) \end{cases}$

Que fait Bob ?

Il calcule successivement :

$$D_b = C_b \oplus f(K_b, C_a)$$
$$\downarrow$$
$$D_a = C_a \oplus f(K_a, D_b)$$

Affirmation : $(D_a, D_b) = (M_a, M_b)$

$$D_b = \underline{C_b} \oplus f(K_b, C_a) = \underline{M_b \oplus f(K_b, C_a) \oplus f(K_b, C_a)}$$
$$= M_b \checkmark$$
$$0$$

$$D_a = \underline{C_a} \oplus f(K_a, \underbrace{D_b}_{= M_b})$$

$$= \underline{M_a \oplus \underbrace{f(K_a, M_b) \oplus f(K_a, M_b)}_{= 0}}$$

$$= M_a \quad \#$$

Ensuite, Alice et Bob peuvent réutiliser ce système pour $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)} \ldots$

Un essai pour réutiliser la clé K :

Data Encryption Standard *(DES)*, 1976

Principe (et seulement le principe, pas tout le système) :

On suppose que le message M et la clé K sont l'un et l'autre de longueur $2n$ bits et on décompose ceux-ci en :

$$M = (M_a\ ,\ M_b),\quad K = (K_a\ ,\ K_b)$$

(n bits, n bits, n bits, n bits)

(NB: en pratique $n = 32$ bits)

Soit $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ une fonction **non-linéaire**.

$$K\ ,\ M \longmapsto f(K,M)$$

Note : Si on utilisait $f(K,M) = K$, le système décrit à la page suivante ne serait rien d'autre que le «one-time pad» décrit avant.

Data Encryption Standard

- Alice calcule ***successivement*** :

$$C_a = M_a \oplus f(K_a, M_b) \quad \text{puis} \quad C_b = M_b \oplus f(K_b, C_a)$$

$$\text{et envoie} \quad C = (C_a, C_b).$$

- Comment Bob peut-il déchiffrer ce message ? Tout simplement, en fait ! Il refait **les mêmes opérations dans l'ordre inverse** :

$$D_b = C_b \oplus f(K_b, C_a) \quad \text{puis} \quad D_a = C_a \oplus f(K_a, D_b)$$

- Ainsi, Bob retrouve M, car :

$$\begin{cases} D_b = C_b \oplus f(K_b, C_a) = M_b \oplus f(K_b, C_a) \oplus f(K_b, C_a) = M_b \\ D_a = C_a \oplus f(K_a, \underbrace{D_b}_{= M_b}) = M_a \oplus f(K_a, M_b) \oplus f(K_a, M_b) = M_a \end{cases}$$

En pratique

- Le système DES applique le principe ci-dessus **8 fois de suite** (avec une clé K 8 fois plus longue) pour chiffrer un message, avec en plus une permutation du message à l'entrée et à la sortie (voir illustration page suivante).

- Ainsi, Alice peut chiffrer plusieurs messages $M_1, M_2, \ldots$ avec la même clé K et espérer que même si Eve intercepte $C_1, C_2, \ldots$ elle ne sera pas capable de retrouver les messages $M_1, M_2, \ldots$ sans la clé K.

- Pourtant, ce système de chiffrement a été « cassé » pour la première fois en 1999 et remplacé depuis par le système AES (Advanced Encryption Standard).

Système DES complet

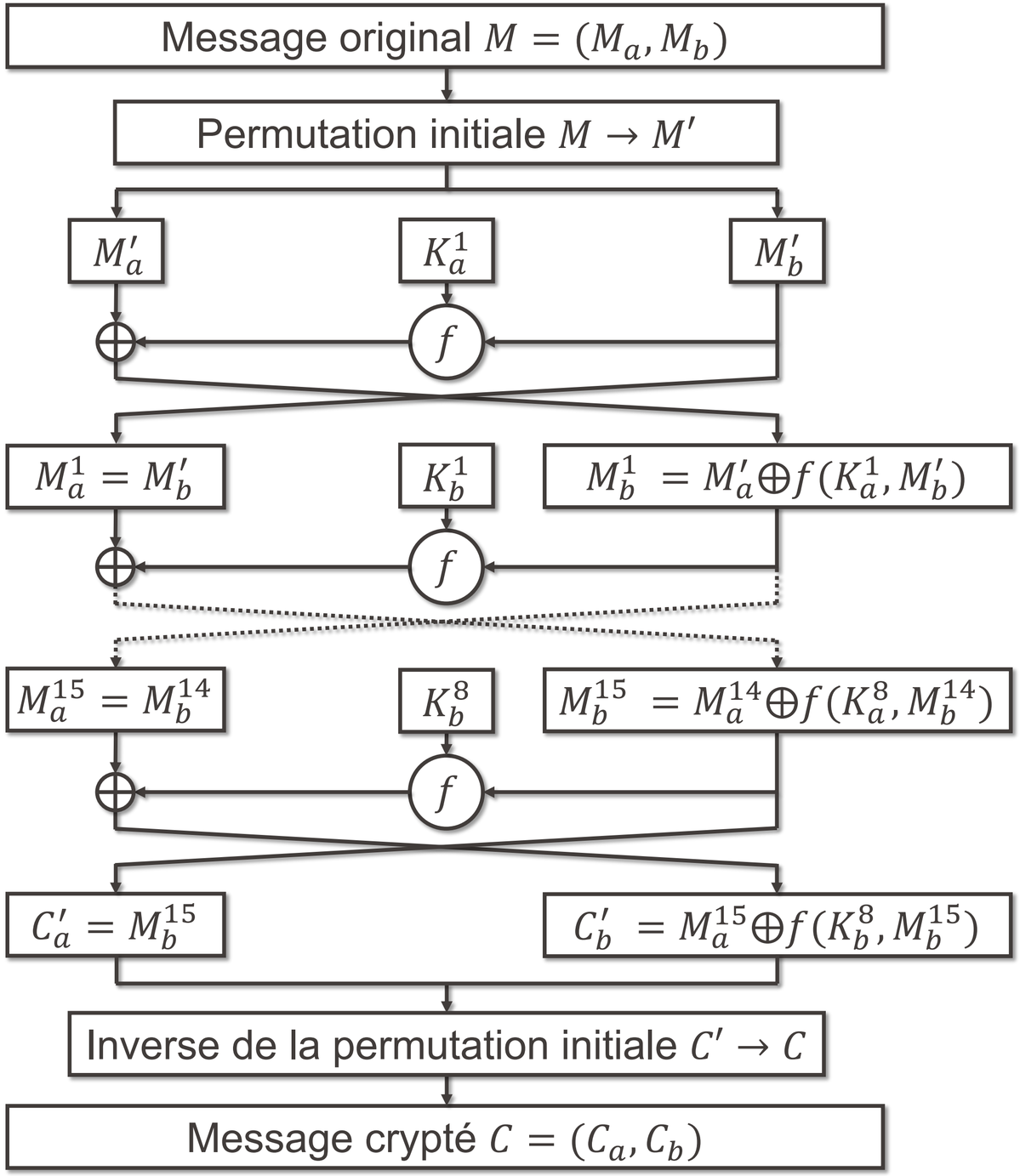
(Notez que le chiffrement et le déchiffrement s'effectuent à nouveau avec les mêmes opérations !)

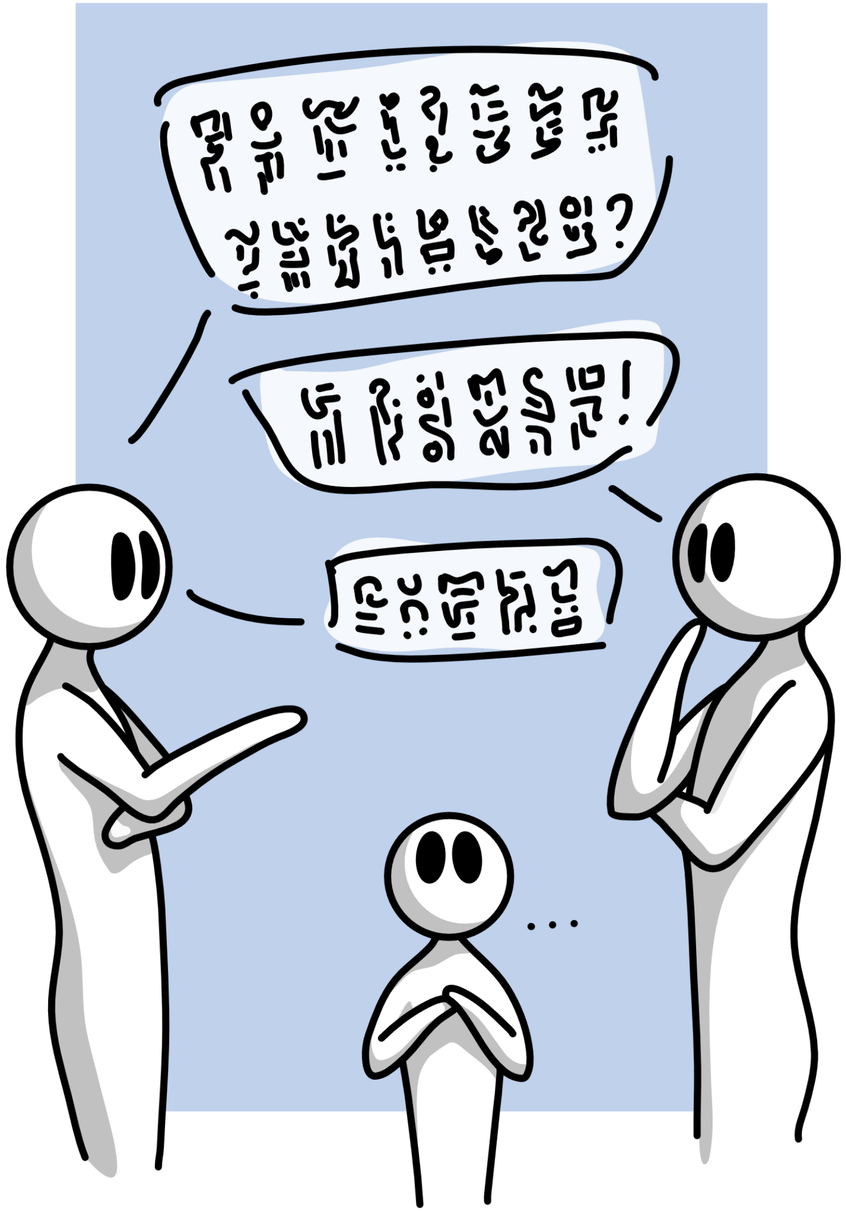
$n = 32$ bits

en 2000 : décryptage

→ AES

$n = 128$ bits





Information, Calcul et Communication

Cryptographie à clé publique

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Scénario

secret K partagé (clé)

Alice

Bob

Encrypte $C = f(M, K)$ → Décrypte $D = g(C, K)$

Introduction

Alice et Bob désirent échanger des informations de manière confidentielle (et/ou envoyer des messages authentifiés) **sans** disposer d'une clé secrète K échangée au préalable.

(Comment) est-ce possible ?

- **Réponse 1**

  Ça n'est pas possible !

- **Réponse 2**

  C'est possible en pratique grâce aux **opérations difficilement inversibles** ou « **opérations à sens unique** ».

Alice choisit N_1 secret

Emmanuel choisit N_2 secret

Ils se mettent d'accord sur $N_3 = 153$

Alice calcule $N_4 = N_1 \cdot N_3 = 35'496$

Emmanuel calcule $N_5 = N_2 \cdot N_3 = 18'666$

Alice calcule $N_1 \cdot N_5 = 4'330'512$

Emmanuel calcule $N_2 \cdot N_4 = 4'330'512$

$\Big\} = K$ ↑ secret partagé

Note: $K = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$

Protocole: version simplifiée

Exemple : Supposons qu'il soit facile de multiplier mais difficile de diviser !

- Alice choisit un nombre N_1
  Bob choisit un nombre N_2
- Ils se mettent d'accord sur un 3ème nombre M (public)
- Alice calcule $N_3 = N_1 \cdot M$ de son côté et envoie N_3 à Bob
  Bob calcule $N_4 = N_2 \cdot M$ de son côté et envoie N_4 à Alice
- Alice calcule ensuite $N_1 \cdot N_4 = N_1 \cdot N_2 \cdot M$
  Et Bob calcule $N_2 \cdot N_3 = N_2 \cdot N_1 \cdot M$

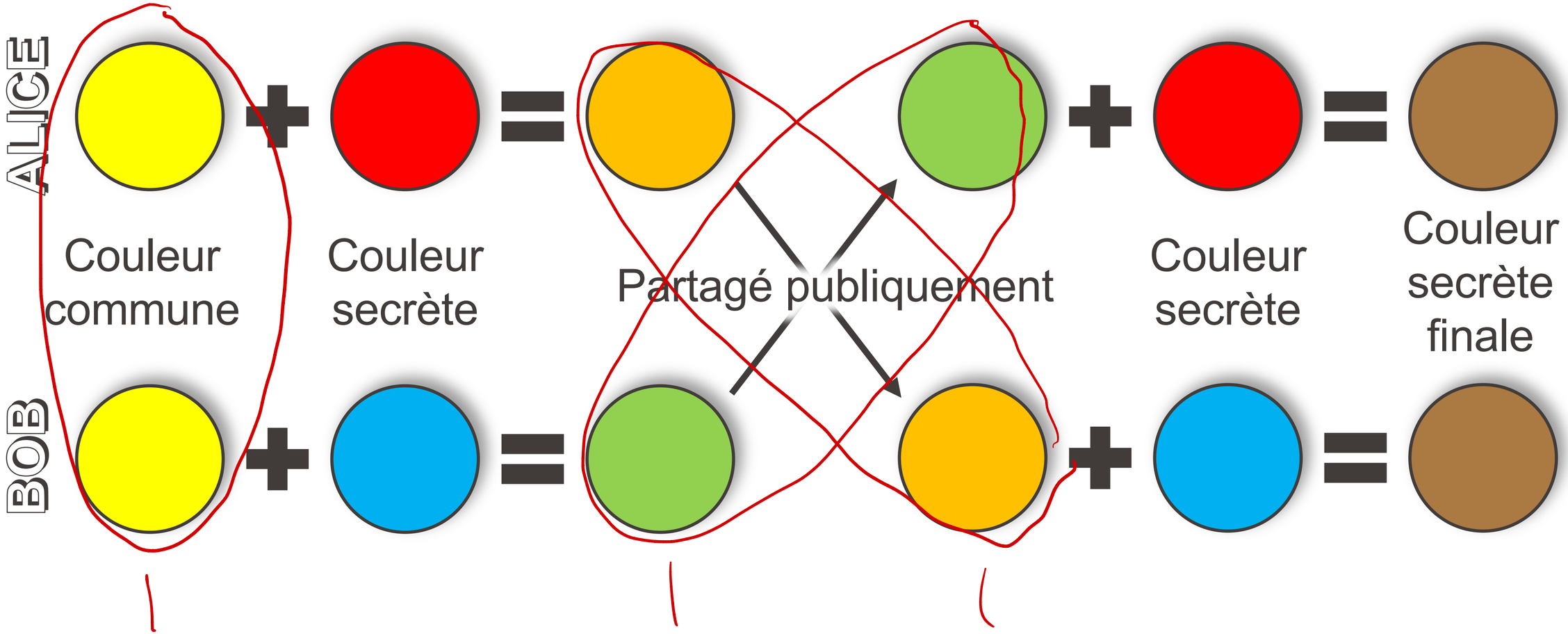
  égaux = secret partagé

Alice et Bob sont ainsi tombés d'accord sur un même nombre.

- Si Eve intercepte N_3 ou N_4 (ou même les deux nombres) et qu'elle ne sait pas diviser, elle ne peut pas retrouver le secret.

La même chose avec des couleurs

- Les couleurs sont facilement mélangeables, mais difficilement séparables



Arithmétique modulaire

- Bien sûr, diviser est une opération facile en réalité :

Eve peut donc effectuer N_3/M et retrouver N_1, de même que N_2.
Par conséquent elle peut calculer le « secret » $N_1 \cdot N_2 \cdot M$.

Il faut donc trouver autre chose !

- Soit P un **grand** nombre premier. Sur l'ensemble $\{0,1,\dots,P-1\}$, on définit l'addition, la multiplication et l'exponentiation **modulo P** :
(toutes des opérations faciles à exécuter)

$$N_1 + N_2 \ (mod\ P) \qquad N_1 \cdot N_2 \ (mod\ P) \qquad N_1^{N_2} \ (mod\ P)$$

Exemples : (avec $P = 5$)

$$4 + 3 \ (mod\ 5) = 2 \qquad 4 \cdot 3 \ (mod\ 5) = 2 \qquad 4^3 \ (mod\ 5) = 4$$

Arithmétique modulaire

- Il se trouve que l'opération $N_1^{N_2} (mod\ P) = N_3$ est difficile à **inverser** (i.e., si on nous donne P, N_1 et N_3, il est difficile de retrouver N_2).

Voilà donc **l'opération à sens unique** que nous allons utiliser.

Si N_1, N_2, N_3, P sont des nombres à 100 chiffres.

mult

( ) : $N_1 \cdot N_2 = N_3$

facile à faire

division

$N_1 \cdot N_2 = N_3$

?

difficile

Arithmétique modulaire

P = premier

- Il se trouve que l'opération $N_1^{N_2}(mod\ P) = N_3$ est difficile à **inverser** (i.e., si on nous donne P, N_1 et N_3, il est difficile de retrouver N_2).

Voilà donc **l'opération à sens unique** que nous allons utiliser.

Remarques

- La difficulté de l'opération d'inversion dépend des nombres P et N_1 choisis (c'est un long chapitre : celui du **logarithme discret**).

Note : Si $N_1^{N_2} = N_3$ alors $N_2 = \log_{N_1}(N_3)$

Arithmétique modulaire

- Il se trouve que l'opération $N_1^{N_2} (mod\ P) = N_3$ est difficile à **inverser** (i.e., si on nous donne P, N_1 et N_3, il est difficile de retrouver N_2).

Voilà donc **l'opération à sens unique** que nous allons utiliser.

Remarques

- La difficulté de l'opération d'inversion dépend des nombres P et N_1 choisis (c'est un long chapitre : celui du **logarithme discret**).
- Il existe par contre des algorithmes efficaces pour trouver de grands nombres premiers et donc réaliser concrètement ce qui va suivre !

- Alice choisit N_1 = nb à 100 chiffres

  Bob choisit N_2 = nb à 100 chiffres
- Alice et Bob <u>se mettent d'accord</u> sur

  • P, un grand nb premier à 100 chiffres

  • M, un nombre compris entre 2 et $P-1$
- Alice calcule $M^{N_1} \pmod P = N_3$

  Bob calcule $M^{N_2} \pmod P = N_4$

P, M, N_3 et N_4 sont publics

- Alice calcule $N_4^{N_1} \pmod P$

  Bob calcule $N_3^{N_2} \pmod P$

Voyons :

Alice : $N_4^{N_1} \pmod P = \left(M^{N_2} \pmod P\right)^{N_1} \pmod P$

$= \left(M^{N_2}\right)^{N_1} \pmod P = \underbrace{M^{N_2 \cdot N_1} \pmod P}_{= K}$

Bob: $N_3^{N_2} \pmod p = \left(M^{N_1} \pmod p\right)^{N_2} \pmod p$

$= \left(M^{N_1}\right)^{N_2} \pmod p = \underbrace{M^{N_1 \cdot N_2} \pmod p}$

$= k$

secret partagé

Note: Alice ne connaît pas N_2

Bob ne connaît pas N_1

= Protocole de Diffie-Hellman-Merkle

Protocole d'échange de clé de Diffie-Hellman

Utilisons cette opération à sens unique pour l'échange d'une clé secrète entre Alice et Bob :

- Alice et Bob choisissent d'abord ensemble un grand nombre premier P à n chiffres, ainsi qu'un autre nombre Q entre 1 et $P-1$.
  (P et Q sont donc publics)
- Alice choisit un nombre N_1 entre 1 et $P-1$
  Bob choisit un nombre N_2 entre 1 et $P-1$
  → secrètement
- Alice effectue $N_3 = Q^{N_1} (mod\ P)$ et publie N_3
  Bob effectue $N_4 = Q^{N_2} (mod\ P)$ et publie N_4
- Alice effectue ensuite $N_4^{N_1} (mod\ P) = (Q^{N_2})^{N_1} (mod\ P) = Q^{N_1 \cdot N_2}\ (mod\ P) = K$
  Bob effectue quant à lui $N_3^{N_2} (mod\ P) = (Q^{N_1})^{N_2} (mod\ P) = Q^{N_1 \cdot N_2}\ (mod\ P) = K$

Conclusion

- Alice et Bob ont ainsi trouvé une clé secrète commune K (= un grand nombre = une longue suite de bits).

- Notez également qu'Alice ne connaît toujours pas N_2, ni Bob ne connaît N_1.

- A partir de P, Q, N_3 et N_4, il est difficile pour Eve de retrouver N_1 ou N_2, car il faudrait inverser

$$N_3 = Q^{N_1} (mod\ P) \text{ ou } N_4 = Q^{N_2} (mod\ P)$$

et donc Eve n'a pas non plus accès au secret K.