Exercice 1. On utilise par exemple que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (on obtient les mêmes résultats avec $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$). Donc

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \sin(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \cos(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \cos(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{12}) = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \tfrac{-6+2\sqrt{12}-2}{2-6} = 2 - \sqrt{3}.$$

La valeur de la tangente est la même que celle de la série précédente ; les autres devraient aussi l'être, mais comment le voir par calcul ? Élevons-les au carré :

$$\text{Série précédente :} \qquad \sin^2\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \tfrac{2-\sqrt{3}}{4}$$
$$\text{Série actuelle :} \qquad \sin^2\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \tfrac{6-2\sqrt{12}+2}{16} = \tfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \tfrac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Des nombres positifs (la rotation $\frac{\pi}{12}$ détermine un point sur le cercle trigonométrique dont la deuxième coordonnée est positive) dont les carrés sont égaux, sont forcément aussi égaux : $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

De même pour les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$; on conclut : $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 2. On utilise à chaque fois la formule des racines d'une fonction quadratique (dont la variable est une fonction trigonométrique), mais Viète est bien sûr aussi possible — voire même plus rapide ?

a) $\cos(x) = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2}, \end{cases}$ et donc $S = \{k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\sin(x) = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2}, \end{cases}$ on écarte la solution 2 (car $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), et ainsi $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Multiplions l'équation par $\tan(x)$ pour obtenir l'équation du deuxième degré en $\tan(x)$ suivante :

$$\tan^2(x) - 3\tan(x) - 4 = 0$$

($\tan(x) = 0$ ne satsfait pas cette équation : nous n'avons pas rajouté de solution).
Ainsi $\tan(x) = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1, \end{cases}$ (cette fois les deux solutions sont admissibles) et ainsi $S = \{\arctan(4) + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\cos^2(t) = \dfrac{1}{4} \iff \cos(t) = \pm\dfrac{1}{2}$ et alors $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Cette équation n'a pas de solution car $\cot^2(101x)$ est toujours positif ou nul, jamais négatif, ainsi $S = \emptyset$.

f) Après division de l'équation par 4, on obtient

$$\cos^2(x) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Pour factoriser ce polynôme (en $\cos(x)$), on cherche, par Viète, deux nombres dont le produit vaut $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et la somme $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$. Ces deux nombres sont par chance(!) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$; donc l'équation est

$$\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$, et $S = \left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 3. La démarche est la suivante. S'il y a un terme constant, on utilise l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour que tous les termes de l'équation soient des fonctions trigonométriques. Une fois cette opération effectuée (au besoin), toutes les équations de cet exercice sont des équations homogènes de degré 2. Il suffit alors de suivre la méthode de résolution donnée au cours pour ce type d'équations.

a) Équation homogène de degré 2 dans laquelle on ne peut pas mettre $\cos(x)$ en évidence. Après division par $\cos^2(x)$, l'équation devient :

$$\tan^2(x) - 2\tan(x) - 3 = 0.$$

En posant $t = \tan(x)$, l'équation devient $t^2 - 2t - 3 = 0$, soit $(t-3)(t+1) = 0$ par Viète, dont les deux solutions sont $t = 3$ et $t = -1$, c'est-à-dire $\tan(x) = 3$ ou $\tan(x) = -1$.
Pour l'équation d'origine, on a donc $S = \{71.57° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-45° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Remplaçons 2 par $2\cos^2(x) + 2\sin^2(x)$ pour obtenir une équation homogène de degré 2 dans laquelle on ne peut pas mettre $\cos(x)$ en évidence. Après division par $\cos^2(x)$, l'équation devient :

$$2\tan^2(x) - 5\tan(x) + 3 = 0.$$

En posant $t = \tan(x)$, cette équation se récrit $2\left(\tan(x) - \frac{2}{2}\right)\left(\tan(x) - \frac{3}{2}\right)$ (en utilisant Viète), dont les solutions sont $\tan(x) = 1$ ou $\tan(x) = \frac{3}{2}$.
Pour l'équation d'origine, on a donc $S = \{56.31° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{45° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Remplaçons 4 par $4\cos^2(3t) + 4\sin^2(3t)$ pour obtenir une équation homogène de degré 2 dans laquelle on ne peut pas mettre $\cos(3t)$ en évidence. Après division par $\cos^2(3t)$, l'équation devient :

$$\tan^2(3t) + 3\tan(3t) - 4 = 0,$$

soit $(\tan(3t) - 1)(\tan(3t) + 4) = 0$, dont les deux solutions sont $\tan(3t) = 1$ et $\tan(3t) = -4$.
Pour l'équation d'origine, on a donc $S = \{15° + k \cdot 60° \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-25.32° + k \cdot 60° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Équation homogène de degré 2 dans laquelle on ne peut pas mettre $\cos(x)$ en évidence. Après division par $\cos^2(x)$, l'équation devient :

$$(\sqrt{3} + 1)\tan^2(x) - 2\sqrt{3}\tan(x) + (\sqrt{3} - 1) = 0.$$

La formule de résolution des équations du second degré donne

$$\tan(x) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \tan(x) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

On conclut $S = \{45° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{15° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4.

a) Équation homogène de degré 3 dans laquelle on peut mettre $\cos(x)$ en évidence :

$$\cos(x)\left(\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)\right) = 0$$

Les solutions de $\cos(x) = 0$ sont $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Après division par $\cos^2(x)$, le second facteur de l'équation devient

$$\tan^2(x) + 2\tan(x) + 1 = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\tan(x) + 1)^2 = 0$$

dont les solutions sont données par $\tan(x) = -1$.
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Comme $\cos^4(x) + 2\cos^2(x) + 1 = (\cos^2(x) + 1)^2$, l'équation devient

$$(\cos^2(x) + 1)^2 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution car $\cos^2(x) + 1$ ne s'annule jamais pour $x \in \mathbb{R}$ et donc $S = \emptyset$.