* Rappels sur le format de l'examen

* Durée 3^h30
* - QCM (18 questions) : $\begin{cases} \text{vide} & 0 \text{ pt} \\ \text{correct} & +3 \text{ pts} \\ \text{faux} & -1 \text{ pt} \end{cases}$

  - Vrai/Faux (10 questions) : $\begin{cases} \text{vide} & 0 \text{ pt} \\ \text{correct} & +1 \text{ pt} \\ \text{faux} & -1 \text{ pt} \end{cases}$

  - Questions ouvertes (16 pts)

  total 80 pts

* Sans documents ni calculatrices

→ 3ème exercice à rendre en ligne (pour dimanche)

Retour à la technique d'intégration par parties :

4) Parfois, l'intégration par parties mène à une formule de récurrence :

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad , \; n \in \mathbb{N}^* .$$

[Notation : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \equiv \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx$]

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; I_n(x) = \int \overbrace{1}^{f'} \cdot \overbrace{\frac{1}{(x^2+1)^n}}^{g} \, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int \overbrace{x}^{f} \cdot \overbrace{\frac{2x(-n)}{(x^2+1)^{n+1}}}^{g'} \, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} \, dx$$

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left(I_n(x) - I_{n+1}(x) \right)$$

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) I_n(x) \right].$$

On a aussi $\displaystyle I_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$

par exemple : $\displaystyle I_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x) \right) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$

8.6 Intégration des fonctions rationnelles

Commençons avec un exemple : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$

① On factorise q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

• 1 est une racine : on factorise par $(x-1)$ en divisant q par $(x-1)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3 - x^2) & x^2+1 \\ \cline{1-1} x-1 & \\ -(x-1) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $q(x) = (x^2+1)(x-1)$ irréductible dans $\mathbb{R}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dans } \mathbb{C} : \\ q(x) = (x-i)(x+i)(x-1)\end{array}\right]$

② On décompose f en éléments simples :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1}$$

On trouve α, β, γ en identifiant les coeffs. du numérateur :

$$x^2+2x-1 = \alpha(x^2+1) + (\beta x+\gamma)(x-1)$$
$$= x^2(\alpha+\beta) + x(\gamma-\beta) + (\alpha-\gamma).$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \gamma-\beta = 2 \\ \alpha-\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1-\beta \\ \gamma = 2+\beta \\ \underbrace{(1-\beta)-(2+\beta)}_{-1-2\beta = -1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On a donc $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1}$

③ On intègre les éléments simples :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2\,dx}{x^2+1} = \log(|x-1|) + 2\arctan(x) + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

Voyons le cas général :

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec $\deg(p) < \deg(q)$

(Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, alors on commence par une division de polynôme avec reste)

⓪ Essayer d'intégrer directement :

ex : $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^4-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4x^3}{x^4-1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ avec $g(x) = x^4 - 1$

donc $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\log(|x^4-1|) + c$, $\quad c \in \mathbb{R}$

① Factoriser q en facteurs irréductibles $\quad q = (\_\_)^{k_1} \cdot (\_\_)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\_\_)^{k_n}$

polynôme de degré 1 ou 2 irréductibles

② Décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$$

éléments simples (fonctions rationnelles)

Facteur de q		Eléments simples correspondants.
(i)	$(x-a)$	$\dfrac{\alpha}{x-a}$
(ii)	$(x-a)^2$	$\dfrac{\alpha_1}{x-a} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}$
(iii)	$(x-a)^m$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$
(iv)	x^2+bx+c	$\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}$
(v)	$(x^2+bx+c)^m$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k \cdot x + \gamma_k}{(x^2+bx+c)^k}$

- Une telle décomposition est toujours possible.
- Il faut ensuite identifier les scalaires $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ par exemple par identification des coefficients.

③ Intégrer les éléments simples :

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \log(|x-a|) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

(ii)/(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx = (1-k)^{-1}(x-a)^{1-k} + c = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$

pour $k \geq 2$

(iv) $$\int \frac{\beta x + \gamma}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \left(\gamma - \frac{b\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{\beta}{2}\log(|x^2+bx+c|) + \left(\gamma - \frac{b\beta}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

Mettre le dernier terme sous la forme $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)^2+1}\,dx = \arctan(g(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$

avec $g(x)$ fonction affine.

Exemple : $\displaystyle\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4}$ (compléter le carré).

$\displaystyle= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$ (faire apparaître 1).

$\displaystyle= \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}$ (faire apparaître $g'(x) = \frac{1}{2}$ la dérivée $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

(v) $(k \geq 2)$ $$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \underbrace{\frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx}_{\frac{\beta}{2}\frac{1}{1-k}(x^2+bx+c)^{1-k}+c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}}_{(*)}$$

Pour $(*)$: mettre sous la forme $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{(g(x)^2+1)^k}\,dx = I_k(g(x)) + c$

g affine

cf. section 8.5.3

8.7 Intégration de développements limités

Thm : Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le DL_n en a suivant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Alors :

$$\int_a^x f(t)\,dt = (x-a)\cdot f(a) + \frac{1}{2} f'(a)\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_2(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Preuve : Il suffit d'intégrer terme à terme. Vérifions la forme du reste :

$$R(x) = \int_a^x (t-a)^n \varepsilon_1(t)\,dt$$

$= (x-a)\cdot(u_x - a)^n \cdot \varepsilon_1(u_x)$ pour un certain $u_x \in [a,x]$, par le Thm. de la moyenne.

$$= (x-a)^{n+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{u_x - a}{x-a}\right)^n \cdot \varepsilon_1(u_x)}_{\varepsilon_2(x)}$$

On a $|\varepsilon_2(x)| \leqslant \left|\frac{u_x - a}{x-a}\right|^n \cdot |\varepsilon_1(u_x)| \leqslant |\varepsilon_1(u_x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Donc $\varepsilon_2(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Ceci montre la forme du reste. ∎

Exemple : $F(x) = \int_0^x \sin(\cos(t))\,dt$. Calculer le DL_5 de F en 0.

On a besoin du DL_4 de $\sin \circ \cos$ en 0.

(i) $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)$ $\quad (\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0)$

(ii) DL_2 de $\sin$ en $1 = \lim_{t \to 0} \cos(t)$. Par la formule de Taylor :

$$\sin(u) = \sin(1) + \cos(1)\cdot(u-1) - \frac{\sin(1)}{2}(u-1)^2 + (u-1)^2\varepsilon(u)$$

$(\varepsilon(u) \underset{u \to 1}{\longrightarrow} 0.)$

(iii) $f(t) = \sin(\cos(t))$

$$= \sin(1) + \cos(1)\cdot\left(\frac{-1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right)$$

pourquoi

$$- \frac{\sin(1)}{2}\left(\frac{-1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right)^2 + \overbrace{t^4\varepsilon(t)}^{\text{pourquoi}} \quad \text{avec } \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$= \sin(1) - \frac{\cos(1)}{2}t^2 + \left(\frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8}\right)t^4 + t^4\varepsilon(t)$$

(iv) On applique le thm. ci-dessus :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sin(1)\cdot x - \frac{\cos(1)}{6}x^3 + \left(\frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8}\right)\frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x).$$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Fin 12/12