Partie I : Séries entières
Rappel.

1. Une **série entière** a la forme
$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$
avec $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Le **rayon de convergence** R satisfait
   - $0 < R < \infty \quad \iff \quad S(x)$ converge si $|x-x_0| < R$ et $S(x)$ diverge si $|x-x_0| > R$;
   - $R = 0 \quad \iff \quad S(x)$ diverge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$;
   - $R = \infty \quad \iff \quad S(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. L'**intervalle de convergence** $I \subset \mathbb{R}$ satisfait
$$x \in I \quad \iff \quad S(x) \text{ converge.}$$
Il est toujours de la forme
$$]x_0 - R, x_0 + R[, \quad [x_0 - R, x_0 + R[, \quad]x_0 - R, x_0 + R] \quad \text{ou} \quad [x_0 - R, x_0 + R].$$

Exercice 1.
Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries entières données ci-dessous.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}\, x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^n+1}}\, x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n3^{n+1}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2}\,(x-2)^n$

Solution.

a) *Remarquons que $x_0 = 0$. On a*
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}}{\frac{\ln(n)}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{n}{n+1} |x|.$$
Or,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$
On conclut,
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}}{\frac{\ln(n)}{n} x^n} \right| = |x|.$$
Par le critère de d'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Ainsi, le rayon de convergence est $\boxed{r = 1}$.
Pour $x = x_0 + r = 1$, la série est
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Or, pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3) \geq \ln(e) = 1$ et donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. Par le critère de comparaison, vu que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

diverge.

Pour $x = x_0 - r = -1$, la série est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}(-1)^n.$$

Vu que pour $n \geq 3$, la suite $\ln(n)/n$ décroît, et $\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n = 0$, on a par le critère des séries alternées, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}(-1)^n$$

converge.

On déduit que l'intervalle de convergence est $\boxed{I = [-1, 1[}$.

b) *Remarquons que $x_0 = 0$. On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^{n+1}+1}} x^{n+1}}{\frac{n}{\sqrt{n^n+1}} x^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n^n+1}{(n+1)^{n+1}+1}} |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}+1} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}+1}} |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n^n}{n^{n+1}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{1}{n^{n+1}}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}+1}} |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} + \frac{1}{n^{n+1}}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}+1}} |x| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{n+1} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vu que $0 < 1$ quelque soit x, par le critère de d'Alembert, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On déduit que l'intervalle de convergence est $\boxed{I = \mathbb{R}}$ et le rayon de convergence est $\boxed{r = +\infty}$.

c) *Remarquons que $x_0 = 2$. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{2(n+1)}}{(n+1)3^{n+2}}}{(-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n3^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{3} |x-2|^2 = \frac{1}{3}|x-2|^2.$$

Or, $\frac{1}{3}|x-2|^2 < 1$ est équivalent à $|x-2| < \sqrt{3}$. Ainsi, par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x-2| < \sqrt{3}$ et diverge pour $|x-2| > \sqrt{3}$. On a donc que le rayon de convergence est $\boxed{r = \sqrt{3}}$.

Pour $x = x_0 + r = 2 + \sqrt{3}$, la série est

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{3}^{2n}}{n3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n},$$

qui converge par le critère des séries alternées.
Pour $x = x_0 - r = 2 - \sqrt{3}$, *la série est*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{n3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n},$$

qui converge par le critère des séries alternées.

On a donc que l'intervalle de convergence est $\boxed{I = [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]}$.

d) *Remarquons que* $x_0 = 2$. *On a*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\arctan(n+1)}{1+(n+1)^2}(x-2)^{n+1}}{\frac{\arctan(n)}{1+n^2}(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)}\frac{1+n^2}{2+2n+n^2}|x-2| = \frac{\pi/2}{\pi/2}|x-2| = |x-2|.$$

Ainsi, par le critère de d'Alembert, la série converge si $|x-2| < 1$ *et diverge si* $|x-2| > 1$. *Le rayon de convergence de la série est donc* $\boxed{r = 1}$.
Pour $x = x_0 + r = 2 + 1 = 3$, *la série est*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{1+n^2}.$$

Or, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq \arctan(n) < \frac{\pi}{2} \quad et 1 + n^2 > n^2,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{1+n^2} < \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \textit{qui converge.}$$

Par le critère de comparaison, la série converge.
Pour $x = x_0 - r = 2 - 1 = 1$, *la série est*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{1+n^2}(-1)^n.$$

La série converge soit par le critère des séries alternées, soit en utilisant le résultat établit pour $x = 3$ *: en effet la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\arctan(n)}{1+n^2}(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{1+n^2},$$

converge, et par conséquent la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{1+n^2}(-1)^n$$

converge absolument et donc converge. On a donc que l'intervalle de convergence est $\boxed{I = [1, 3]}$

Partie II : primitives et intégrales indéfinies

Exercice 2.
A partir des primitives usuelles et des primitivess de compositions, trouver des primitives pour les fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \sin(2x+1)$

b) $f(x) = \cos\left(4 - \dfrac{x}{10}\right)$

c) $f(x) = \tan(x)$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \sinh(x)$

f) $f(x) = \cosh(x)$

g) $f(x) = x\sin(x^2)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

i) $f(x) = (ax+b)^p \quad (p \neq -1)$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ *(utiliser le point précédent)*

l) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

n) $f(x) = x^2 e^{x^3}$

o) $f(x) = (ax^p+b)^s x^{p-1}$ $(s \neq -1,\ a, p \neq 0)$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solution.

Les primitives F sont définies à une constante $C \in \mathbb{R}$ près.

a) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$

b) $F(x) = -10\sin\left(4 - \frac{x}{10}\right) + C$

c) $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + C$

d) $F(x) = -e^{-x} + C$

e) $F(x) = \displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \cosh(x) + C$

f) $F(x) = \displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \sinh(x) + C$

g) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

h) $F(x) = \frac{-1}{x} + C$

i) $F(x) = \displaystyle\int (ax+b)^p\,dx = \frac{1}{a}\int a(ax+b)^p\,dx = \frac{1}{a(p+1)}(ax+b)^{p+1} + C$

j) $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(|1+x|) - \ln(|1-x|) + C = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$

k) $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx$

$= \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$

l) $F(x) = -\displaystyle\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\ln\left(|1-x^2|\right) + C$ *car* $(1-x^2)' = -2x$ *(même idée qu'au ix))*

m) $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(|\sin(x)|) + C$ *car* $(\sin(x))' = \cos(x)$ *(même idée qu'au ix)*

n) $F(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$ *(même idée qu'au ix))*

o) $F(x) = \displaystyle\int (ax^p+b)^s\,x^{p-1}\,dx = \frac{1}{ap}\int ap\,x^{p-1}(ax^p+b)^s\,dx = \frac{1}{ap(s+1)}\,(ax^p+b)^{s+1} + C$

car $(ax^p+b)' = ap\,x^{p-1}$ *(même idée qu'au (ix))*

p) $F(x) = \arcsin(x) + C$.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx$

Solution.

Dans cette série, on va calculer ces primitives en les ramenant à des primitives standards. Avec l'avancement du cours vous verrez qu'on pourrait aussi utiliser d'autres méthodes d'intégration.

a) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx &= \int \left(\frac{3x}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^2}\right)dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\ln\Big(1+x^2\Big) + 4\arctan(x) + C\,.\end{aligned}$$

b) On observe que la fonction à intégrer est une dérivée d'une composition, car on peut écrire

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} = -f(g(x))g'(x) = -\Big(F(g(x))\Big)'\,,$$

avec $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ *et* $F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}-C$ *une primitive de* F*. Ainsi*

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx = -\left(-\frac{1}{2\cos(x)^2}-C\right) = \frac{1}{2\cos(x)^2}+C\,.$$

c) On remarque qu'il faut intégrer une composition avec une fonction affine, c.à-d.

$$\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2}}\,.$$

Comme $\big(\arcsin(x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*, la fonction* $\arcsin(x)+C$ *est une primitive de* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et on obtient*

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)+C\,.$$

d) En utilisant la définition de $\sinh(x)$ *et une identité remarquable, on a*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-(e^{-x})^2}{1+e^{-x}}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\left(x+e^{-x}\right)+C\,.\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$$

A l'aide du théorème de continuité de la dérivée, montrer par l'absurde que f n'admet pas de primitive.

Solution.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$*. Alors, on a*

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Or, par le théorème de continuité de la dérivée, vu que la limite $\lim_{x\to 0} F'(x)$ *existe, on a que* $\lim_{x\to 0} F'(x) = F'(0)$. *Donc*

$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} F'(x) = F'(0) = f(0) = 1,$$

qui est absurde.

Remarque.
Plus généralement, on peut montrer que si une fonction f admet un certain x_0 tel que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, mais $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, alors f n'admet pas de primitive.
Néanmoins, on ne peut pas généraliser à ce résultat "si f est discontinue en un point, alors elle n'admet pas de primitive". En effet, on a vu dans l'exemple 6.14 que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est discontinue en $x = 0$, mais elle admet la primitive

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Conclusion : si f a une discontinuité en x_0 du type $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe mais est différente de $f(x_0)$, alors f n'admet pas de primitive. Par contre, si f a une discontinuité du type $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas, alors on ne peut rien dire. L'exemple ci-dessus est un tel cas où la fonction admet une primitive, tandis que la fonction de Heavyside $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leq 0$ est l'exemple d'une fonction qui a une telle discontinuité en 0 mais qui n'admet pas de primitive.

Partie III : intégrales définies

Exercice 5.
Soit $f \in C^0([a,b])$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

a) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.
   Indication : utiliser le théorème de la moyenne.

b) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

c) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.

d) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

e) Pour tout $x \in [a,b]$, on a $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Solution.

a) VRAI.
Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in \,]a,b[$ *tel que* $0 = \int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. *Comme* $b > a$, *on doit avoir* $f(u) = 0$.

b) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[-1,2]$. *Alors* $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} \geq 0$ *mais* $f(-1) = -1 < 0$.

c) *VRAI.*

Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a,b[$ *tel que* $\int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. *Comme on a* $f(u) < 0$ *et que* $b > a$, *le résultat suit.*

d) *FAUX.*

Prendre par exemple $f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[-2,-1]$. *Ainsi* $f(x) \leq 0$ *sur* $[-2,-1]$ *mais* $F(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0$ *pour tout* $x \in [-2,-1]$.

e) *FAUX.*

Considérer par exemple la fonction constante $f(x) = 1$ *sur l'intervalle* $[0,1]$. *Alors* $F(x) = x+1$ *est une primitive de* f *mais*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x dt = x - 0 = x \neq x+1 = F(x).$$

Par contre, toute primitive de f *s'écrit comme* $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + C$, *avec* $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Vérifier les deux inégalités suivantes

$$\frac{7}{100} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3}\,dx < \frac{1}{10}\ .$$

<u>Indication</u> *: Borner le dénominateur, intégrer le numérateur et utiliser le fait que* $e > \dfrac{5}{2}$.

Solution.

Posons $f(x) := \dfrac{1}{5+x^3}$, $g(x) := e^{-2x}$ *et* $I := \int_0^1 f(x)g(x)dx$. *On a que* $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *sont continues et* $g(x) \geq 0$ *sur* $[0,1]$. *De plus*

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right).$$

La fonction $\dfrac{1}{5+x^3}$ *est décroissante sur* $[0,1]$ *et on a les inégalités* $\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{1}{5+x^3} \leq \dfrac{1}{5}$. *Ainsi*

$$\frac{1}{6}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) \leq I \leq \frac{1}{5}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right).$$

Comme $e > \dfrac{5}{2}$, *il suit que* $1 - e^{-2} > 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$, *ce qui mène aux bornes souhaitées*

$$\frac{7}{100} < \frac{1}{12}\left(1-e^{-2}\right) \leq I \leq \frac{1}{10}\left(1-e^{-2}\right) < \frac{1}{10}\ .$$

Exercice 7 (Intégrale de Gauss)**.**

Calculer le développement limité d'ordre 6 de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ en $x_0 = 0$, et en déduire une valeur approchée de

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Remarque : Les 4 premières décimales exactes de cette intégrale sont $0,7468$.

Solution.

Nous connaissons le développement d'ordre 3 de e^y *en* $y = 0$ *:*

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(|y|^3).$$

En posant $y = -x^2$, nous avons bien que $x = 0 \implies y = 0$, donc

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(|x|^6).$$

En intégrant le polynôme de Taylor, nous avons l'approximation

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &\approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \\
&= 0,7428...
\end{aligned}$$

Nous observons que les deux premières décimales de cette approximation sont correctes.

Partie IV : Intégration par parties

Exercice 8.
Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad (a \neq 0)$

Solution.

a) *On procède par intégration par parties d'abord avec $f'(x) = \cos(x)$ [$\Rightarrow f(x) = \sin(x)$], $g(x) = x^2$ [$\Rightarrow g'(x) = 2x$] et puis avec $f'(x) = \sin(x)$ [$\Rightarrow f(x) = -\cos(x)$], $g(x) = x$ [$\Rightarrow g'(x) = 1$]. On obtient*

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos(x)\,dx &= \sin(x)\,x^2 - 2\int \sin(x)\,x\,dx = \sin(x)\,x^2 - 2\left(-\cos(x)\,x + \int \cos(x)\,dx\right) \\
&= \left(x^2 - 2\right)\sin(x) + 2x\cos(x) + C.
\end{aligned}$$

b) *Posons $I_{a,b} = \displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$. Intégrons par parties avec $f'(x) = e^{ax}$ [$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$] et $g(x) = \cos(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = -b\sin(bx)$] :*

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.$$

Cette dernière intégrale peut aussi être intégrée par parties avec $f(x) = e^{ax}$ [$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$] et $g(x) = \sin(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = b\cos(bx)$]

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

On remarque que l'intégrale à droite est $I_{a,b}$.On peut alors combiner les deux équations précédentes et isoler $I_{a,b}$. On obtient

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I_{a,b}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a}\left(\cos(bx) + \frac{b}{a}\sin(bx)\right)$$

et donc

$$I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big) + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Exercice 9.
Pour chaque intégrale I_n suivante, calculer I_0 et déterminer une formule récursive (c'est à dire I_n exprimé en fonction de I_{n-1}), avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $I_n = \int \ln(x)^n \, dx$

b) $I_n = \int_0^1 x^{2n} \cos(\pi x) \, dx$

Solution.

a) D'abord,

$$I_0 = \int \ln(x)^0 \, dx = \int 1 \ dx = x + C.$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, nous procédons avec une intégration par partie avec $f'(x) = 1$ et $g(x) = \ln(x)$:

$$I_n = \int 1 \cdot \ln(x)^n \, dx = x \ln(x)^n - \int x \cdot n \frac{\ln(x)^{n-1}}{x} \, dx = x \ln(x)^n - nI_{n-1}.$$

b) D'abord,

$$I_0 = \int_0^1 \cos(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi x)]_0^1 = 0.$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, nous procédons avec deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \underbrace{\frac{1}{\pi} [x^{2n} \sin(\pi x)]_0^1}_{=0} - \frac{2n}{\pi} \int_0^1 x^{2n-1} \sin(\pi x) \, dx \\
&= \frac{2n}{\pi^2} [x^{2n} \cos(\pi x)]_0^1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} \int_0^1 x^{2(n-1)} \cos(\pi x) \, dx \\
&= \frac{-2n}{\pi^2} - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}.
\end{aligned}$$