On a $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, en effet (le seul point délicat est $x_0 = 0$) :

(i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R})$

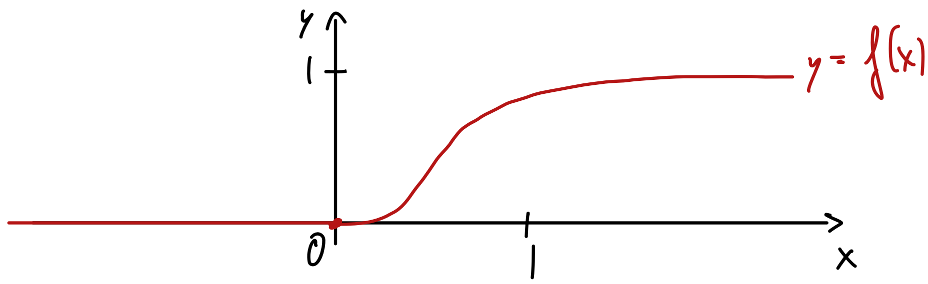
(ii) $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \end{cases}$

Détail : posons $y = \frac{1}{x}$. On a $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y}}{1/y^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$ (croissances comparées)

Donc par le thm. de continuité de la dérivée, $f'(0) = 0$. Ainsi $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(iii) On peut montrer ainsi, par récurrence que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.

fin 02/12




Série de Taylor de $f$ en $0$ : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad (R = +\infty)$

$S$ diffère de $f$ pour tout $x > 0$ : $f$ n'est pas développable en série de Taylor au voisinage de $0$.

Développement limité donné par la formule de Taylor ($DL_n(0)$ de $f$) :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{=0} + r_n(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc pour $x > 0$, $\lim_{n \to \infty} r_n(x) = e^{-1/x} > 0$.

# Chapitre 8 : Intégrales (définies et indéfinies)

## 8.1 Intégrales indéfinies (primitives)

**Def** : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in C^0(I)$. Une primitive de $f$ est une fonction $F \in C^1(I)$ telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Si $I = [a,b]$ alors $\begin{cases} F'(a) \text{ doit être lu comme } F'_+(a) \text{ (dérivée à droite)} \\ F'(b) \text{ doit } \text{———} \ F'_-(b) \text{ (dérivée à gauche).} \end{cases}$

**Proposition** : Soit $f \in C^0(I)$ et soient $F$ et $G$ des primitives de $f$. Alors $F - G$ est une fonction constante, autrement $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.

**Preuve** : $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$.
Par un corollaire du thm. des accroissements finis, on en déduit que $F - G$ est une fonction constante. ∎

**Def** : On appelle intégrale indéfinie toute primitive de $f \in C^0(I)$ donnée à une constante près et elle est notée $\int f(x)\,dx$. On a :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } F \text{ une primitive quelconque de } f.$$

**Remarque** : prendre la primitive d'une fonction est une opération linéaire c-à-d que $\forall f, g \in C^0(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

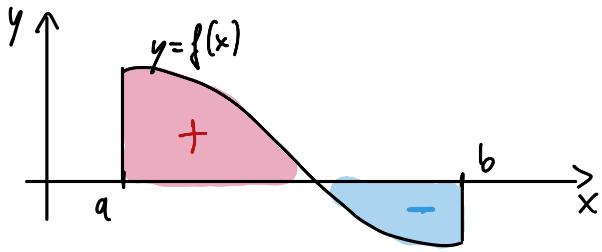
Exemples de primitives usuelles à retenir :

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx \quad , C \in \mathbb{R}$ |
|---|---|
| $k \quad , k \in \mathbb{R}$ | $k \cdot x + C$ |
| $x^{\alpha} \quad , \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$ | $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x} \quad , x \in \mathbb{R}^*$ | $\log(\lvert x \rvert) + C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x) + C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\exp(x)$ | $\exp(x) + C$ |
| $\log(x) \quad , x > 0$ | $x \log(x) - x + C$ |
| $g'(x)\, g(x)^{\alpha} \quad , \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $\frac{1}{\alpha+1} g(x)^{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{g'(x)}{g(x)}$ | $\log(\lvert g(x) \rvert) + C$ |
| $\tan(x)$ | $-\log(\lvert \cos(x) \rvert) + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x) + C$ |
| $\frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$ | $\arctan(g(x)) + C$ |

## 8.2 Construction de l'intégrale définie

Soit $f \in C^0([a,b]) \quad , \quad a < b$.

Objectif : donner un sens à " l'aire algébrique entre le graphe de $f$ et l'axe des abscisses et entre $a$ et $b$ ".



# Construction de l'intégrale de Riemann

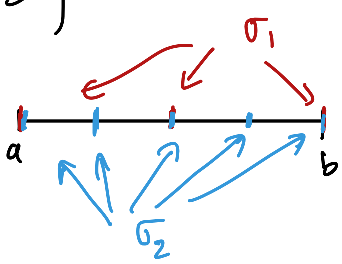
On considère la subdivision de $[a,b]$ suivante :

$$\sigma_n = \left\{ x_i = a + \frac{b-a}{2^n} \cdot i \quad \text{avec } i = 0, \dots, 2^n \right\}$$

Pour $n=0$ : $\sigma_0 = \{a, b\}$

$n=1$ : $\sigma_1 = \left\{ a, \frac{b+a}{2}, b \right\}$

... etc

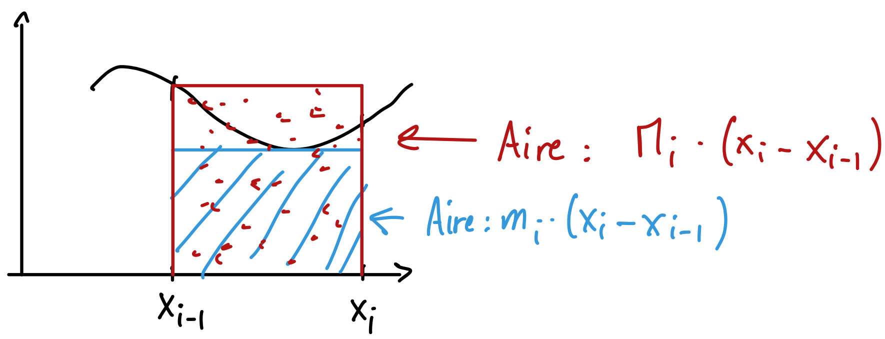



On a $\sigma_{n+1} \supset \sigma_n$

Etant donné $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée, on définit :

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{où} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{(Somme de Darboux inf.)}$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{2^n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{où} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{(Somme de Darboux sup.)}$$




Alors la suite $\underline{S}_n$ est croissante, la suite $\overline{S}_n$ est décroissante et de plus $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$. Donc ces 2 suites admettent des limites

$$\underline{S} = \lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n \quad \text{et} \quad \overline{S} = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n$$

**Def :** Si $\underline{S} = \overline{S} =: S$ alors on dit que $f$ est intégrable sur $[a,b]$.

On note $$S = \int_a^b f(x)\,dx$$ (appelée "intégrale définie" de $f$ de a à b)

**Thm :** Si $f \in C^0([a,b])$ alors $\underline{S} = \overline{S} =: S$ et donc $f$ est intégrable.

**Explication du thm :** La continuité de $f$ sur $[a,b]$ implique : (continuité uniforme) hors programme)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ceci implique $0 \leq \overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{i=1}^{2^n} (M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{2^n}(x_i - x_{i-1})}_{x_{2^n} - x_0} = \varepsilon$

$\underbrace{x_{2^n}}_{b} - \underbrace{x_0}_{a}$

D'où $\lim_{n\to+\infty} (\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0$. et donc $\underline{S} = \overline{S}$ ■

⚠ Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ , $x$ et $t$ sont des variables muettes.

borne sup.

borne inf. de l'intégrale

intégrande

rappelle un élément "infinitésimal" de longueur.

## 8.3 Propriétés des intégrales définies

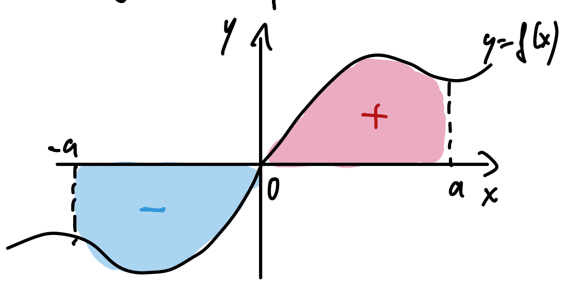
**Convention :**
- Si $a = b$ : $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
- Si $a > b$ : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Soient $f, g \in C^0([a,b])$ , $a < b$.

**Propriété 1 :** linéarité de l'intégrale : si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

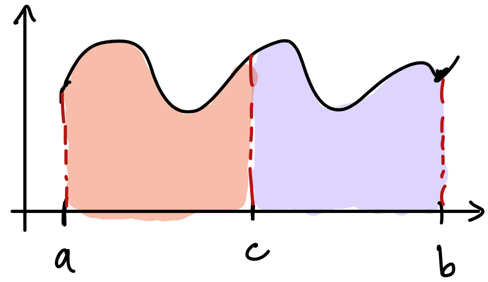
**Propriété 2 :** Si $f$ est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$




: les aires + et − s'annulent.

**Propriété 3 :** (Relation de Chasles). Si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$




**Propriété 4 :** (Monotonie de l'intégrale)

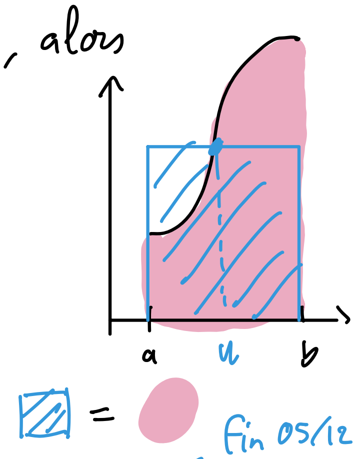
Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

En particulier : $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$

**Propriété 5 :**

**Thm** (Théorème de la valeur moyenne). Soit $f \in C^0([a,b])$, alors $\exists\, u \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(u)$




Fin 05/12