

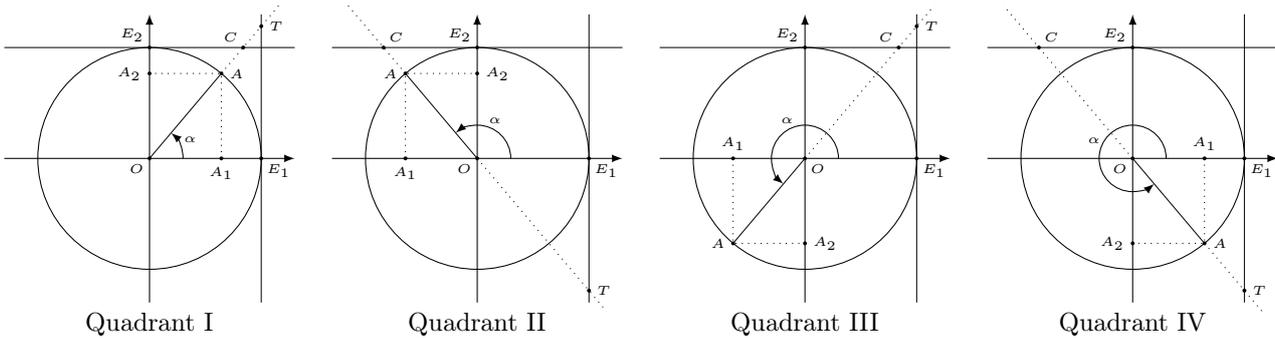
Exercice 1. Quadrant I : Les quatres fonctions sont strictement positives.

Quadrant II : Le sinus est strictement positif, le cosinus strictement négatif, la tangente et la cotangente strictement négatives.

Quadrant III : Le sinus et le cosinus sont strictement négatifs, la tangente et la cotangente strictement positifs.

Quadrant IV : Le sinus est strictement négatif, le cosinus strictement positif, la tangente et la cotangente strictement négatives.

Exercice 2. Les figures suivantes résument les cas où l'angle α détermine un point A sur le cercle trigonométrique dans chacun des quatre quadrants du plan.



Dans chaque cas, on obtient par définition $|\cos(\alpha)| = \overline{OA_1}$, $|\sin(\alpha)| = \overline{OA_2}$, $|\tan(\alpha)| = \overline{E_1T}$ et $|\cot(\alpha)| = \overline{E_2C}$.

a) Par le théorème de Pythagore appliqué au triangle $\triangle OA_1A$, on a

$$1 = \overline{OA}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 = |\cos(\alpha)|^2 + |\sin(\alpha)|^2 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha).$$

b) Si $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($\pi \in \mathbb{Z}$), le théorème de Thalès appliqué aux triangles $\triangle OE_1T$ et $\triangle OA_1A$, donne

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OE_1}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{E_1T}} \quad \text{soit} \quad \frac{|\cos(\alpha)|}{1} = \frac{|\sin(\alpha)|}{|\tan(\alpha)|} \quad \text{et donc} \quad |\tan(\alpha)| = \frac{|\sin(\alpha)|}{|\cos(\alpha)|}.$$

De plus, dans les quadrants I et III, $\tan(\alpha)$ est positif, et $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sont de même signe; dans les quadrants II et IV, $\tan(\alpha)$ est négatif, et $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sont de signes opposés. Comme les cas où $\alpha = k\pi$

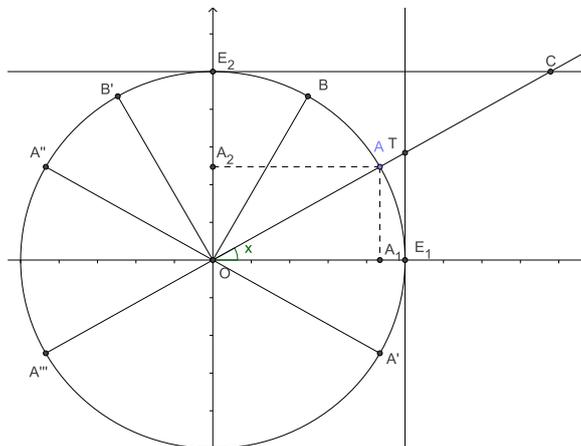
($\pi \in \mathbb{Z}$) donnent $\tan(\alpha) = 0 = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, on a bien $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ dans tous les cas où $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\pi \in \mathbb{Z}$).

c) On raisonne comme au point précédent avec le théorème de Thalès et en séparant les cas.

d) On a $1 + \tan^2(\alpha) \stackrel{2)}{=} 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \stackrel{1)}{=} \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

e) Même raisonnement qu'au point d).

Exercice 3. Dans la figure suivante, nous avons dessiné l'angle x ainsi que tous les angles cherchés.



- a) L'angle $-x$ est déterminé par $\widehat{E_1OA'}$, où le point A' est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\cot(-x) = -\cot(x)$, car on peut à chaque fois prendre le symétrique des points A_1 , A_2 et T par rapport à l'axe des abscisses, et le symétrique de C par rapport à l'axe des ordonnées.
- b) L'angle $\pi - x$ est l'angle $\widehat{E_1OA''}$ où A'' est le point symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi cette fois on regarde les points symétriques de A_1 , A_2 , et C par rapport à l'axe des ordonnées et le symétrique de T par rapport à l'axe des abscisses, et on obtient que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$, $\cot(\pi - x) = -\cot(x)$.
- c) L'angle $\pi + x$ est l'angle $\widehat{E_1OA'''}$ où A''' est le point symétrique de A'' par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi cette fois on regarde les points symétriques de A_1 par l'axe des ordonnées, A_2 par l'axe des abscisses et les points C et T sont les mêmes. Ainsi on obtient que $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, $\tan(\pi + x) = \tan(x)$, $\cot(\pi + x) = \cot(x)$.
- d) L'angle $\frac{\pi}{2} - x$ est l'angle $\widehat{E_1OB}$ où B est obtenu en reportant la distance $\overline{E_1A}$ en E_2 . Alors les triangles $\triangle OE_2B$ et $\triangle OE_1A$ sont isométriques (trois côtés isométriques), on constate alors que les rôles de \cos et \sin sont « inversés ». Ainsi $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot(x)$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan(x)$.
- e) Cette fois l'angle $\frac{\pi}{2} + x$ est l'angle $\widehat{E_1OB'}$, où B' est le symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi par symétrie on conclut que $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$, $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot(x)$, $\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan(x)$.

Exercice 4.

- a) En utilisant la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on en déduit que $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$.
- b) En utilisant les relations $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on en déduit que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et $\sin^2(x) = \tan^2(x) \cos^2(x)$; en égalant ces deux relations, on obtient $1 - \cos^2(x) = \tan^2(x) \cos^2(x)$ et donc $\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$. Ainsi,

$$\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2(x)}} = \pm\frac{12}{13}.$$

- c) Comme $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)} = \pm\frac{3}{4}$, on calcule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}$.

Exercice 5. Pour cet exercice, nous rappelons que

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En exploitant les symétries du cercle trigonométrique comme à l'**Exercice 3**, nous trouvons les valeurs exactes demandées :

- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -1$.
- $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
- $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
- $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 6. Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} (1 + \tan(x))^2 &= 1 + 2 \tan(x) + \tan^2(x) = 1 + 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + 2 \cos(x) \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 + 2 \cos(x) \sin(x)}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\cos(x) = 0$ et ni le membre de gauche ni le membre de droite de l'égalité d'origine ne sont définis. L'égalité est donc vraie pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et aucun des côtés n'est défini dans les autres cas.

Exercice 7.

- a) La fonction est définie quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et donc $D(f) = \mathbb{R}$. (Remarquons que si x est négatif, la fonction est bien définie ; par exemple, si $x = -2.5$, alors $\lfloor x \rfloor = -3$.)
- b) Soit x un nombre réel. Alors $x = \lfloor x \rfloor + b$ où b est la *partie fractionnaire*, on a $b \in [0, 1[$. Ainsi, comme $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, on a $f(x) = b \in [0, 1[$ et l'ensemble cherché est $[0, 1[$.
- c) Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x = \lfloor x \rfloor + b$ (avec $b \in [0, 1[$). Alors

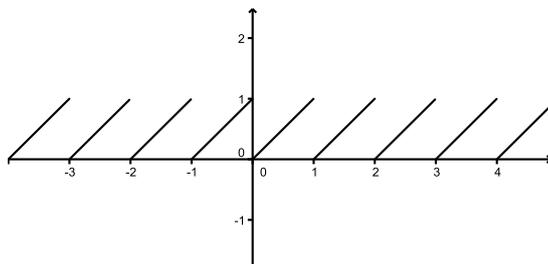
$$f(x + 1) = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - \lfloor \lfloor x \rfloor + b + 1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

Ainsi on a montré que la fonction était périodique de période au plus 1. De plus, pour $x \in \mathbb{Z}$ et n'importe quel candidat $p \in]0, 1[$ pour une période plus petite, on a

$$f(x + p) = x + p - \lfloor x + p \rfloor = x + p - x = p \neq 0 = f(x)$$

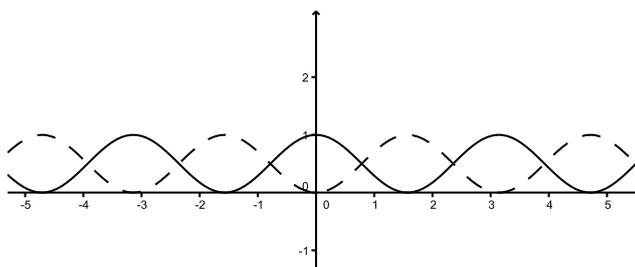
La période est donc bien de 1.

- d) Le graphe de la fonction est représenté dans la figure suivante :



Exercice 8.

- a) Notons T la période de g . Alors $g^2(x + T) = (g(x + T))^2 = (g(x))^2 = g^2(x)$ et donc g^2 est périodique de période plus petite ou égale à T (il est possible que la période soit plus petite).
- b) Par le cours la fonction \sin est de période 2π , alors par le point 2) \sin^2 est de période au plus 2π . Comme $\sin^2(0) = \sin^2(\pi)$, on soupçonne la fonction \sin^2 d'être même π -périodique. En effet, on sait que $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ et donc $\sin^2(x + \pi) = \sin^2(x)$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$.
- c) On conclut comme au point précédent que la période est π .

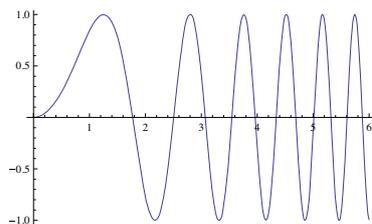


- d) La fonction $\sin^2 + \cos^2$ est constante égale à 1. Alors $\sin^2(x + T) + \cos^2(x + T) = 1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ et ce quelque soit la valeur de T . Mais comme par définition, la période est le plus petit nombre $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$, cette fonction périodique n'a pas de période!

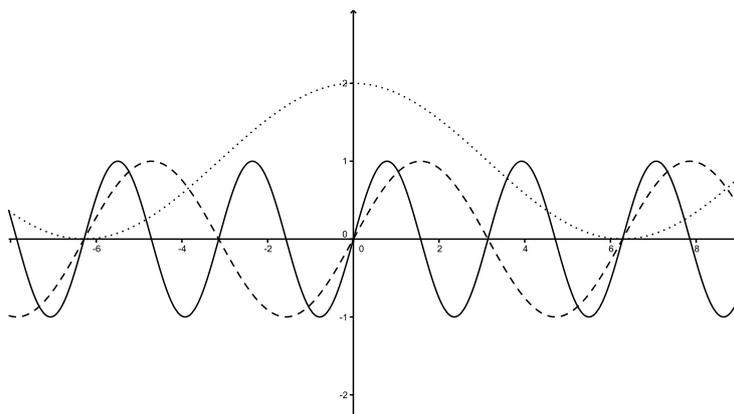
Exercice 9.

- a) Faux car $1 = \cos(2 \cdot \pi) \neq 2 \cos(\pi) = -2$.
- b) Vrai, en effet, soit un triangle rectangle dont les deux cathètes mesurent 1 et 1000, alors pour un des angles aigus de ce triangle, disons α , on a $\tan(\alpha) = \frac{1000}{1}$. Par l'exercice 7,2), $\tan(180 - \alpha) = -\tan(\alpha) = -1000$. (Cet angle $180 - \alpha$ est très proche de $90^\circ : 90,06^\circ$)
- c) Faux car $\sin(\pi) = 0$ et pourtant $\pi > 0$.
- d) Vrai car si on note T la période de f , alors quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on a $g \circ f(x + T) = g(f(x + T)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Ainsi la fonction $g \circ f$ est de période au plus T (peut-être moins).

e) L'assertion est fautive car si on prend par exemple $f = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$, alors $f \circ g(x) = \sin(x^2)$. La fonction x^2 croit de manière quadratique et ainsi le graphe de la fonction $f \circ g$ oscille de plus en plus vite si bien qu'elle n'est pas périodique. Voici en illustration le graphe de la fonction $f \circ g$.



Exercice 10. Dans la figure ci-dessous, nous avons représenté la fonction $x \mapsto \sin(x)$ en traitillés, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ en trait plein, et la fonction $x \mapsto \cos(x/2) + 1$ avec des pointillés.



Remarquons que $\cos(x/2) + 1 = 2 \cos^2(x)$ et donc cette fonction est la fonction \cos^2 avec une amplitude double. Tandis que la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est la fonction $x \mapsto \sin(x)$ dont on a divisé la période par 2.