Partie I : Continuité de la dérivée

Rappel : théorème de la continuité de la dérivée. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$ tels que

(1) f continue sur $]a,b[$,

(2) f dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$,

(3) $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe.

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$. En particulier, f' est continue en x_0.

Exercice 1.
Vrai ou faux ?
Soient $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $a < x_0 < b$, et soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$.

a) Si $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = L$.

b) Si $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = L$, alors f est dérivable à droite en x_0 et $f'_+(x_0) = L$.

c) f est continue en x_0.

d) Si f est dérivable à droite de x_0, alors $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$.

e) Si f est dérivable à droite de x_0, alors f est continue en x_0.

f) Si f est dérivable à droite de x_0, alors f est continue à droite de x_0.

Exercice 2.
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \sin^2(\pi x)\cos(\pi x) + 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a) Est-ce que $f \in C^0(\mathbb{R})$?

b) Est-ce que $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Partie II : Extréma, croissance et convexité

Exercice 3.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}, \ x \in \mathbb{R}^*.$$

a) Etudier la croissance de f et déterminer les extréma locaux de f

b) Etudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de f

c) Calculer $f(I)$ pour les intervalles $I \subset \mathbb{R}$ suivants :

$$I = [1,3], \qquad I = [-4,-2], \qquad I =]0,+\infty[.$$

Exercice 4.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\ln(x)^2, \; x \in \mathbb{R}_+^*.$$

a) Etudier la croissance de f et déterminer les extréma locaux de f
b) Etudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de f
c) Calculer $f(I)$ pour les intervalles $I \subset \mathbb{R}$ suivants :

$$I = [1,3], \qquad I =]0,+\infty[.$$

Partie III : Suites récursives
Rappel. Soit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n), \; n \geq 0 \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable. Pour étudier la convergence de (a_n), procédez comme suit :

1. Poser et étudier le signe de la fonction $g(x) := f(x) - x$ qui satisfait :

$$\begin{cases} a_n \to L & \Longrightarrow & g(L) = 0 \\ g \geq 0 \text{ sur un intervalle } I & \Longrightarrow & a_n \text{ croissante sur I} \\ g \leq 0 \text{ sur un intervalle } I & \Longrightarrow & a_n \text{ décroissante sur I.} \end{cases}$$

2. Etudier la croissance de f qui donne des indications sur éventuel majorant ou minorant de (a_n) sur un intervalle I.
3. Conclure avec le critère des suites monotones et bornées.

Exercice 5.
Soit la suite récursive

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4}, \; \forall n \geq 0.$$

a) Avec la méthode des tableaux de signes, déterminer les valeurs de $a_0 \geq 0$ telles que a_n converge, et, le cas échéant, donner les limites.
b) Avec un argument de parité, déduire de (a) les valeurs de $a_0 < 0$ telles que a_n converge, et, le cas échéant, donner les limites.

Exercice 6.
Soit la suite récursive

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right), \; \forall n \geq 0.$$

Avec la méthode des tableaux de signes, déterminer les valeurs de $a_0 \in \mathbb{R}^*$ telles que a_n converge, et, le cas échéant, donner les limites.

Exercice 7.
Soit la suite récursive

$$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}, \; \forall n \geq 0.$$

a) Montrer que la suite converge pour tout $a_0 \geq 2 - \sqrt{3}$.
b) Montrer que la suite converge pour tout $a_0 < 0$.
Indication : où se trouve a_1 ?
c) Trouver une valeur $a_0 \in \mathbb{R}^*$ telle que a_n diverge.
d) **Challenge :** construire une suite récursive $(b_n)_{n\geq 0}$ telle que si a_0 est un élément de (b_n), alors (a_n) diverge. Calculer la limite L de cette suite. Est-ce que (a_n) diverge si $a_0 = L$?

Exercice 8 (Suites récursives linéaires)**.**
Soient $P, Q \in \mathbb{R}$ et la suite récursive

$$a_{n+1} = Pa_n + Q, \ \forall n \geq 0.$$

a) Si $P = 1$, étudier la convergence de a_n en fonction de Q.

b) Si $P \neq 1$, démontrer par récurrence que

$$a_n = \frac{Q}{1-P} + P^n \left(a_0 - \frac{Q}{1-P} \right), \ \forall n \geq 1.$$

En déduire des critères de convergence de a_n en fonction de P, Q et a_0.

c) Avec les résultats précédents, étudier la convergence des suites suivantes en fonction de a_0 :

i) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1$

ii) $a_{n+1} = 2a_n - 1$

iii) $a_{n+1} = a_n + 2$

iv) $a_{n+1} = -2a_n$

Exercice challenges.
Rappel. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{cases} f \text{ est } \textbf{convexe} \text{ sur } I \text{ si} & f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \ \forall t \in [0,1], \ \forall x, y \in I \\ f \text{ est } \textbf{concave} \text{ sur } I \text{ si} & f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y), \ \forall t \in [0,1], \ \forall x, y \in I. \end{cases}$$

Exercice 9.
Le but de cet exercice est de démontrer que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable sur I, alors

$$\begin{cases} f'' \geq 0 \quad \text{sur } I & \Longrightarrow \quad f \text{ convexe sur } I \\ f'' \leq 0 \quad \text{sur } I & \Longrightarrow \quad f \text{ concave sur } I. \end{cases}$$

La réciproque est vraie, mais n'est pas demandée.

a) Démontrer chacune des implications suivantes :

$$\begin{aligned} f'' \geq 0 \text{ sur } I \quad & \Longrightarrow \quad f' \text{ croissante sur } I \\ & \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y), \quad \forall x, y \in I \\ & \Longrightarrow \quad f \text{ convexe sur } I \end{aligned}$$

Le cas échéant, enoncer les résultats du cours utilisés.

b) Montrer que

$$f \text{ convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad -f \text{ concave sur } I.$$

c) En déduire que

$$f'' \leq 0 \text{ sur } I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ concave sur } I.$$