Corrigé Test 2 - Dérivée 20 novembre 2024

Exercice 1. *(7 points)*

Montrer formellement que la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition.

$ED(f) = \mathbb{R}^*$.

f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pour $a \in \mathbb{R}^*_+$, posons $u = \dfrac{a}{2}$ et travaillons dans l'intervalle $I =]a-u; a+u[$.

On veut pour tout x dans I, $|f(x) - f(a)| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{a-x}{ax}\right| < \dfrac{\delta}{ax} \overset{x>a-u>0}{<} \dfrac{\delta}{a(a-u)} = \varepsilon.$

Ainsi, avec $\delta = \varepsilon \cdot a(a-u)$, la définition de la continuité est vérifiée.

Pour $a \in \mathbb{R}^*_-$, on pose $u = \left|\dfrac{a}{2}\right|$. On a alors $I =]a-u; a+u[\;\subset\; \mathbb{R}^*_-$.

Par suite, $\delta = \varepsilon \cdot a(a+u)$ car $|x| > |a+u|$ et $a < a+u$, $\Rightarrow$ $a(a+u) > 0$.

On peut aussi voir que f est impaire : $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

Ainsi, si f est continue sur $\mathbb{R}^*_+$, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}^*_-$.

Exercice 2. *(3 + 4 + 4 +1 = 12 points)*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{\pi}$

$$f'(x) = \pi\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^{\pi-1} \frac{1\cdot(3x+2) - (x-1)\cdot 3}{(3x+2)^2} = \pi\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^{\pi-1} \frac{5}{(3x+2)^2} = \frac{5\pi(x-1)^{\pi-1}}{(3x+2)^{\pi+1}}.$$

b) $g(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^4}$

$$g'(x) = \frac{3\cdot(2x-1)^2\cdot 2\cdot(5x+1)^4 - (2x-1)^3\cdot 4\cdot(5x+1)^3\cdot 5}{(5x+1)^8}$$

$$= \frac{2(2x-1)^2(5x+1)^3[3(5x+1) - 10(2x-1)]}{(5x+1)^8} = \frac{2(2x-1)^2(-5x+13)}{(5x+1)^5}.$$

c) $h(x) = 3\sqrt{2\sin x\cos x}$

$$h'(x) = \left(3(2\sin(x)\cos(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{2}(2\sin(x)\cos(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2)$$

$$= 3\,\frac{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{\sqrt{2\cos(x)\sin(x)}} = \frac{3(\cos(x)+\sin(x))(\cos(x)-\sin(x))}{\sqrt{2\cos(x)\sin(x)}} \text{ ou encore } \frac{3\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}.$$

d) $i(x) = \ln(x - x^2)$ $\qquad i'(x) = \dfrac{1-2x}{x-x^2} = \dfrac{1-2x}{x(1-x)}.$

Exercice 3. *(3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 12 points)*

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$;

En utilisant trois fois la règle de Bernoulli-L'Hospital, on voit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos(2x)}{\cos x} = 6.$$

b) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

Ici, on peut évaluer la fonction $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ au point $x=\pi$. Ainsi, par continuité, on a

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot \ln(x^4)$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} x^3 \ln(x^4) = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3x+1)\cdot e^x \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0.$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x-2} \qquad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x^2-3} = 4$

Exercice 4. *(3 + 3 + 8 + 3 + 3 = 20 points) partiellement repris de Burier juin 2022*

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.

$ED(f) = \mathbb{R}_+$, $\quad$ zéro de f : $x-3=0 \iff x=3$

Signe :

x	-∞	0		3		+∞
$f(x)$	//////		$-$	0	$+$	

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f.

AV : pas de trou ni de bord ouvert dans l'ED de f $\Rightarrow$ pas d'AV.

AH : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AH

AO : $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x}\cdot e^{\sqrt{x}} = 1(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AO.

c) Montrer que $\quad f'(x) = \dfrac{(2\sqrt{x}+x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ et étudier la croissance de f.

$$f'(x) = 1\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x}+x-3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$ED(f') = \mathbb{R}_+^*$

zéro de f' : $2\sqrt{x}+x-3=0 \overset{x=y^2}{\Rightarrow} 2y+y^2-3=0 \Leftrightarrow (y+3)(y-1)=0 \Rightarrow x=\sqrt{y}=1$

r	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	0	$+$	
$f(x)$				$\searrow$	MIN$(1;-2e)$	$\nearrow$	

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2+\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot e^{\sqrt{x}} = (2+0-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$

d) Sachant que $\quad f''(x) = \dfrac{(x\sqrt{x}+3x-3\sqrt{x}+3)\cdot e^{\sqrt{x}}}{4\,x\sqrt{x}}$, étudier la courbure de f.

$ED(f'') = \mathbb{R}_+^*$

zéro de f'' : comme $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x\sqrt{x} > 0$ $\forall x \in ED(f'') = \mathbb{R}_+^*$, f'' ne s'annule que si

$x\sqrt{x}+3x-3\sqrt{x}+3 = 0 \overset{x=y^2}{\Rightarrow} g(y) = y^3+3\,y^2-3y+3 = 0.$

Montrons que g ne s'annule jamais et est toujours positive sur $\mathbb{R}_+^*$:

$g'(y) = 3y^2+6y-3 = 3\,(y^2+2y-1)$ s'annule en $y = \dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}.$

Seule la solution positive $-1+\sqrt{2}$ nous concerne.

g' est négative sur $]0;-1+\sqrt{2}[$ et positive sur $]-1+\sqrt{2},+\infty[$.

Ainsi g atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ en $-1+\sqrt{2}$.

Or, $g(-1+\sqrt{2}) > -3(-1+\sqrt{2})+3 > 0$, donc g est toujours positive sur $\mathbb{R}_+^*$

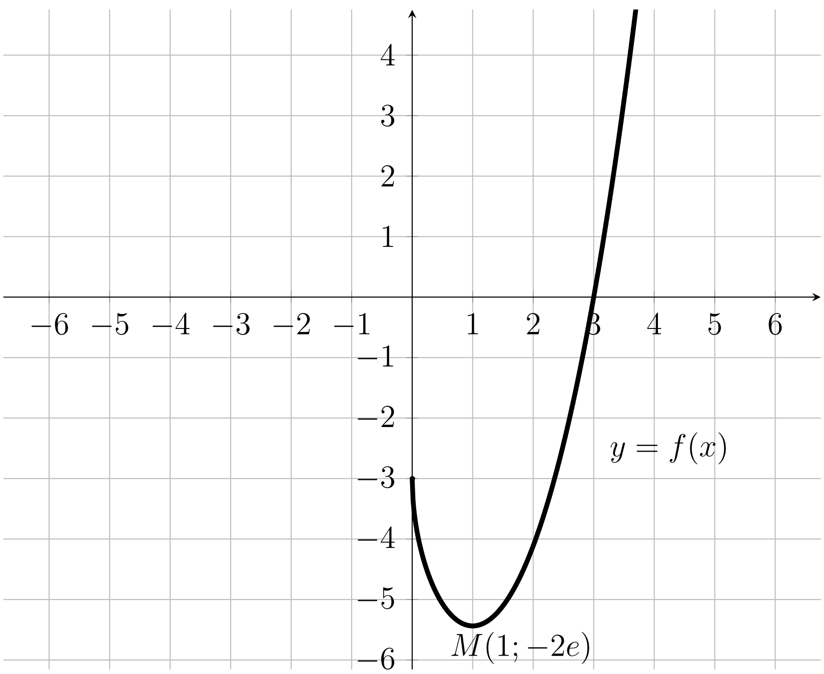
Par suite f'' est aussi positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est convexe.

On peut également montrer que $x\sqrt{x}+3x-3\sqrt{x}+3 > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ en constatant que :

— si $x \in [0;1]$, $\quad x\sqrt{x}+3x-3\sqrt{x}+3 \geq -3\sqrt{x}+3 = 3\,(1-\sqrt{x}) \geq 0$ et

— si $x \in [1;+\infty[$, $\quad x\sqrt{x}+3x-3\sqrt{x}+3 \geq 3x-3\sqrt{x} = 3\,(x-\sqrt{x}) \geq 0$.

e) Représenter le graphe de f dans la grille ci-dessous compte tenu de tout ce qui précède.



Exercice 5. *(4 points)*

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \cos x$ en utilisant la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
\cos(a)' &= \lim_{x\to a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} = -\lim_{x\to a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \\
&= -\sin(a) \cdot \lim_{t\to o} \frac{\sin(t)}{t} = -\sin(a) \cdot 1 = -\sin(a)
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\cos(x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\
&= -\sin(x) \cdot \lim_{t\to o} \frac{\sin(t)}{t} = -\sin(x) \cdot 1 = -\sin(x).
\end{aligned}$$

Exercice 6. *(5 points)*

Démontrer la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\
&= f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a).
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to h} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).
\end{aligned}$$