Série 20

Pour le 26 février 2025

Exercice 1

On donne une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par sa matrice A relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Détermine les valeurs propres éventuelles, les sous-espaces propres associés, ainsi qu'une base de ceux-ci.

Si α est diagonalisable, déterminer la base dans laquelle la matrice est diagonale, puis la matrice de changement de base P et la matrice diagonale D relativement à cette nouvelle base. Calcule P^{-1} et vérifie que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Exercice 2

On considère un espace vectoriel V de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$.

Soit l'application linéaire $\alpha : V \to V$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) Déterminer les valeurs propres éventuelles de α.

b) Déterminer une base des espaces propres éventuels.

c) α est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Soit l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $\alpha(P) = P - (x-1)P'$, où P' est le polynôme dérivée de P.

a) Le polynôme $P = x^2 - 2x + 1$ est-il un vecteur propre de α ? Si oui, donne la valeur propre correspondante ; sinon, explique pourquoi ce n'est pas un vecteur propre.

b) α est-elle diagonalisable ? Si oui, donne la matrice diagonale et une base correspondante. Sinon, explique pourquoi ce n'est pas le cas.

Exercice 4

Détermine la nature géométrique des applications linéaires définie par les matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Soit le plan muni d'un repère orthonormé.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ telle que $a^2 + b^2 = 1$. Prouve que A est la matrice d'une symétrie vectorielle orthogonale dont on donnera, en fonction de a et b, une équation cartésienne de l'axe de symétrie.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $U =< (1; 2; 1) >$ et $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$. Soit p la projection sur W parallèlement à U. Déterminer la matrice de p relativement à la base canonique.

Exercice 7

Relativement à une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on note s la symétrie vectorielle orthogonale (par rapport à un plan) qui échange les vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Donne une base orthonormée $\mathcal{B}'$ relativement à laquelle la matrice de s est diagonale.

b) Détermine la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$.

Exercices théoriques

Exercice 8

On considère une application linéaire $p : V \to V$ qui vérifie $p \circ p = p$. Montre que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

Exercice 9

On considère une application linéaire $s : V \to V$ qui vérifie $s \circ s = Id$. Montre que les seules valeurs propres possibles sont -1 et 1.