

# Série 18

Pour le 5 février 2025

## Exercice 1

Mets la matrice suivante (à coefficients réels) sous forme échelonnée et réduite à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

Calcule toutes les solutions du système linéaire suivant (aide-toi de l'exercice 1) :

$$\begin{cases} 4x + 8y + 4z + 8t + u = 9 \\ x + 2y + z + 2t = 1 \\ x + 2y + 2z + 5t + u = 6 \end{cases}$$

## Exercice 3

Calcule toutes les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 4x + 4y + z = 2 \\ x + y = -7 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 13y - 7z = 0 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

## Exercice 4

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie  $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y)$ .

On rappelle de la série 17 que  $g_1 = (1; 0; 0)$ ,  $g_2 = (0; 0; 1)$  et  $g_3 = (-2; 1; 1)$  forment une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  et que  $u_1 = (1; 1)$  et  $u_2 = (1; 0)$  forment une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

a) Calcule la matrice de changement de base  $Q$  de  $\mathcal{B}$  vers la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire la matrice  $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$ .

**Indication.** Cette matrice est facile à construire puisque ses colonnes donnent les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}$  exprimés dans la base canonique.

- b) Calcule la matrice de changement de base  $P$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire la matrice  $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$ .

**Indication.** Cette matrice est plus difficile à construire puisque ses colonnes donnent l'expression des vecteurs de la base canonique écrits comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{C}$ .

- c) Calcule la matrice  $B$  de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  grâce à la formule du changement de base (qui fait intervenir un produit de trois matrices).

### Exercice 5

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Une matrice de changement de base est carrée.
- b) Si on travaille sur un corps fini  $K = \mathbb{F}_p$  et avec l'espace vectoriel  $K^n$ , il n'y a qu'un nombre fini de matrices de changement de base.
- c) Il existe une matrice de  $M_{2 \times 7}(\mathbb{C})$  dont le rang vaut 3.
- d) Il existe une matrice de  $M_{3 \times 5}(\mathbb{C})$  dont le rang vaut 3.
- e) Soit  $\alpha : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ . On choisit les bases canoniques et on construit les matrices  $A$  de  $\alpha$  et  $B$  de  $\beta$ . Alors le rang de la matrice  $BA \in M_5(\mathbb{R})$  est le même que celui de la matrice  $AB \in M_2(\mathbb{R})$ .

- f) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est échelonnée et réduite.

### Exercice 6

Mets la matrice suivante, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , sous forme échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Calcule son rang en fonction des paramètres  $a, b, c$ .

**Exercice 7**

Calcule la dimension du sous-espace vectoriel  $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \mid p(1) = 0, p(2) = p(3)\}$  de  $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ . Vérifie ensuite que  $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$  appartient à  $W$  et trouve une base de  $W$  qui te permette d'exprimer  $p(x)$  facilement dans cette base.

**Exercice 8**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix}$ .

- Résout le système  $AX = B$ .
- Résout le système  $AX = C$  en fonction des valeurs du paramètre  $a$ .

**Exercices théoriques****Exercice 9**

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  une matrice carrée.

Montre que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- Le système d'équations linéaire et homogène formé des  $n$  équations  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$  admet une unique solution (laquelle?).

**Indication.** Le système d'équations  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$  revient à l'équation vectorielle  $Ax = 0$ .

- Pour tous  $b_1, \dots, b_n \in K$ , il existe une solution au système linéaire formé des  $n$  équations  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ .

**Indication.** On peut par exemple montrer que b) implique a) par contraposée.

**Exercice 10**

**La transposée.** Soit  $A \in M_{n \times m}(K)$ . On définit la matrice *transposée*  $A^t \in M_{m \times n}(K)$  en échangeant le rôle des lignes et des colonnes : dans la  $i$ -ème ligne et  $j$ -colonne de  $A^t$  le coefficient  $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ .

- Calcule la transposée de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ .
- Montre que l'application "transposition"  $M_{n \times m}(K) \rightarrow M_{m \times n}(K)$  est linéaire.
- Montre que  $(A^t)^t = A$ .
- Montre que la transposition définit un isomorphisme  $K$ -linéaire entre  $M_{n \times m}(K)$  et  $M_{m \times n}(K)$ .
- Détermine l'ensemble des matrices appartenant à  $M_n(K)$  qui vérifient  $A^t = A$ . Montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel  $W$  de  $M_n(K)$  et calcule sa dimension.  
Pour te simplifier la vie, tu peux supposer que  $n = 4$ .
- Soit  $U$  le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Calcule sa dimension (pour  $n = 4$  si tu veux). Donne une base explicite de  $U$ .
- Calcule la dimension de  $U \cap W$  et trouve une base.
- Est-ce que  $U + W = M_n(K)$ ?

**Exercice 11**

Démontre la proposition suivante :

Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

**Indication.** Tu peux montrer que toute matrice est équivalente à une matrice de la forme

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice formée des  $r$  premières lignes et  $r$  premières colonnes est la matrice  $I_r$ , les autres coefficients sont tous nuls. Pour ce faire, considère  $A$  comme la matrice d'une application linéaire et choisis astucieusement de bonnes bases!