Série 17

Pour le 29 janvier 2025

Exercice 1

On considére le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 1}$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 1. Montre que $(1+x, 1-x)$ forme une base de V et utilise-la pour construire un isomorphisme $\alpha : V \to \mathbb{R}^2$.

Indication. Définis d'abord l'image des vecteurs (ici ce sont des polynômes) de base, puis "étend par linéarité" pour définir $\alpha(ax+b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère l'application linéaire *trace*, $\mathrm{Tr} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, définie par

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

a) Choisis les bases canoniques de $M_2(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{C}$ pour construire la matrice de la trace.

b) Calcule $\ker \mathrm{Tr}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $\alpha : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ l'application définie par $\alpha(X) = AX$. Montre que α est linéaire et calcule sa matrice (pour la base canonique).

d) Soit $\beta : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la composition $\mathrm{Tr}\circ\alpha$. Explique pourquoi cette application est linéaire et calcule sa matrice (pour les bases canoniques).

e) Calcule le rang de β en fonction des coefficients a, b, c et d de la matrice A.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x;y;z) = (x+y+z; x-2y)$.

a) Montre que $g_1 = (1;0;0)$, $g_2 = (0;0;1)$ et $g_3 = (-2;1;1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Montre que $u_1 = (1;1)$ et $u_2 = (1;0)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Trouve la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

d) Trouve la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

b) Le $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{F}_7)$ est isomorphe au $\mathbb{F}_{11}$-espace vectoriel $\mathbb{F}_{11}[x]^{\leq 3}$.

c) Le produit AB, où $A \in M_{n\times 1}(K)$ et $B \in M_{1\times n}(K)$ est une matrice $n \times n$ dont le rang vaut *au plus* 1.

d) Lorsque $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ sont non-nulles, le rang de $\beta \circ \alpha$ vaut *au moins* 1.

e) La matrice de la dérivation $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 4} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ est inversible (rappelons que $D(p(x)) = p'(x)$).

Exercice 5

Soit $\alpha : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\alpha(x;y;z;t) = (x+y+z+t; x+2y-t; x-y+3z+5t).$$

a) Trouve la matrice A telle que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ x+2y-t \\ x-y+3z+5t \end{pmatrix}$.

b) Calcule $\alpha(1;2;2;-1)$, $\alpha^{-1}(1;3;-3)$ et $\alpha^{-1}(0;0;0)$.

c) Calcule l'image par α du sous-espace $<(1;2;2;-1),(1;1;0;0)>$.

Exercice 6

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les applications linéaires données par $\alpha(x; y) = (2x+y; x-y; 3x)$ et $\beta(a; b; c) = (a + b - c; b + 2c)$. On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule les matrices A de α et B de β.

b) Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.

c) Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

Exercice 7

Soient $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires données par

$$\alpha(x; y; z) = (2x + y + z; y - z) \text{ et } \beta(a; b) = (a + b; a - b; b).$$

On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule les matrices A de α et B de β.

b) Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.

c) Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

Exercice 8

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Attention, on ne demande pas de calculer l'inverse s'il existe, mais seulement d'expliquer pourquoi telle matrice est ou n'est pas inversible !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication. Tu pourras considérer ces matrices comme étant celles d'applications linéaires et travailler avec les vecteurs colonnes de ces matrices.

Exercices théoriques

Exercice 9

Soit V un K-espace vectoriel et $\alpha : V \to V$ un isomorphisme (linéaire). Montre que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$ est K-linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 10

Opérations élémentaires. On travaille avec des matrices A, $E_{ij}(\lambda), P_{ij}$ et $D_i(\mu)$ de $M_n(K)$.

a) Montre que $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda + \mu)$ et calcule l'inverse de la matrice $E_{ij}(1)$.

b) Calcule $E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1)$.

c) Décris la matrice $AE_{ij}(\lambda)$.

d) Décris la matrice $AD_i(\mu)$.

e) Décris la matrice AP_{ij}.

Exercice 11

Soient $A, B \in M_n(K)$. Montre que BA est une matrice inversible si et seulement si A et B sont inversibles.
Une piste possible. Si BA est inversible, considérer les applications linéaires $\alpha : K^n \to K^n$ et $\beta : K^n \to K^n$ dont A et B sont les matrices, respectivement. Le but est de montrer que α et β sont des isomorphismes. On peut le faire par exemple en calculant le noyau de α et l'image de β.